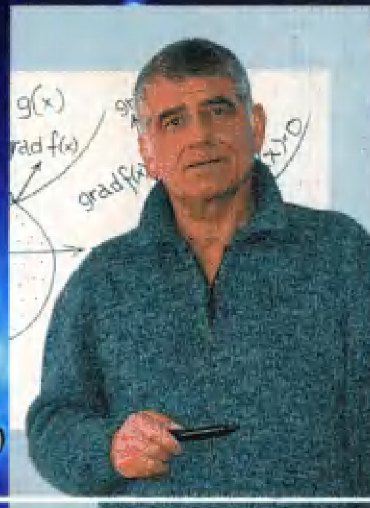
В. Босс



Лекции по математике

Том 5

Функциональный анализ

Краткое и ясное изложение предмета

URSS

В. Босс

ЛЕКЦИИ по МАТЕМАТИКЕ

ТОМ 5

Функциональный анализ

МОСКВА

URSS

ББК 22.162я73

Босс В.

Лекции по математике. Т. 5: **Функциональный анализ.** — М.: КомКнига, 2005. 216 с.

ISBN 5-484-00190-0

Охват материала соответствует курсам функционального анализа, изучаемым в университетах. Помимо функциональных пространств и линейных отображений рассматриваются также: теория меры, интеграл Лебега, элементы нелинейного анализа, положительные операторы.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью. Объяснения даются «человеческим языком». Значительное внимание уделяется мотивации результатов, взаимосвязям, общей картине.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Подписано к печати 09.09.2005 г. Формат 60×90/16. Печ. л. 13,5. Зак. № 210.
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 5-484-00190-0

3453 ID 30041
9 785484 001903

Оглавление

Предисловие к «Лекциям»

Самолеты позволяют летать, но добираться до аэропорта приходится самому.

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

1) *живой учитель*;
2) *обыкновенный подробный учебник*;
3) *рядовой задачник*;
4) *учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем»*.

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантели с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обозримый вид, обнаженные конструкции доказательств, — такого сорта книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано», — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

Предисловие к то́му

Множество необходимых уточнений всегда неисчерпаемо.

Функциональный анализ — дисциплина особая. Вникать приходится с завязанными глазами. Потому что сюжет развивается в области, где не работает интуиция. Интуиция не работает, конечно, и в линейной алгебре, но там ее заменяет иллюзия. Прикидка на плоскости обычно дает верные заключения о пространстве n измерений, что и формирует полезное заблуждение, ибо вода камень точит. Та же процедура при бесконечном числе измерений часто ведет к ошибочным умозаключениям. В результате вместо приятной иллюзии образуется неприятная фобия, и знание начинает усваиваться вслепую.

Поэтому здесь, как нигде, необходима концентрация внимания на путеводных нитях. На мотивах и трудностях, на роли получаемых результатов. На понимании, наконец, которое в диапазон «теорема — доказательство» не помещается.

Глава 1

Множества, пространства, отображения

Есть две разные задачи. Так сделать книгу, чтобы ее легко было читать. Либо так, чтобы легко было писать.

1.1. Операции и соответствия

Какую-то часть теории множеств можно считать общеизвестной. По крайней мере, это касается обозначений $x \in X$, $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$, $\varnothing$.

Менее известна операция *симметрической разности* множеств,

$$X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$

Элементы $X \Delta Y$ принадлежат либо *только* X, либо *только* Y.

Дополнение X в S обозначается как $X' = S \backslash X$.

Что касается $X \subset Y$ — «X подмножество Y», то далее подразумевается возможность $X = Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается.

Наконец, $X \times Y$ обозначает *декартово произведение* множеств X и Y, т. е. множество пар элементов $\{x, y\}$, $x \in X$, $y \in Y$.

Системы множеств. На множествах обычно задается некоторая структура и взаимоотношения между элементами. Значительную роль играет, как правило, выделение различных систем подмножеств.

Множество всех подмножеств множества X будем обозначать как 2^X. Непустое семейство $\Phi \subset 2^X$ называется *кольцом*, если из $A, B \subset \Phi$ следует $A \cap B \subset \Phi$ и $A \Delta B \subset \Phi$.

Эквивалентное определение: *кольцом* подмножеств из 2^X называется *непустая система* $\Phi \subset 2^X$, *замкнутая относительно операций объединения, пересечения и разности.*

Кольцо считается *σ-кольцом*, если оно замкнуто относительно операции ***счетного объединения.***

Наконец, кольцо (σ-кольцо) называют *алгеброй* (*σ-алгеброй*), если $X \subset \Phi$, т. е. само множество X входит в систему Φ.

> *Элементы минимальной σ-алгебры, содержащей любые сегменты*
> $$[a,b] \subset \mathbb{R},$$
> *называют борелевскими множествами, или B-множествами.*

Кольца множеств используются в теории меры. Но там исследование отталкивается от семейств элементарных множеств, представляющих собой объединения конечного числа непересекающихся «прямоугольников». Такие семейства являются *полукольцами* (см. раздел 3.1).

Эквивалентность и упорядоченность. В анализе довольно часто возникает потребность отождествления некоторых элементов из X — игнорирования определенных различий. Соответствующая операция — обозначим ее пока знаком «$\sim$» — называется *эквивалентностью*, и она обязана удовлетворять следующим требованиям:

$$\boxed{x \sim x} \quad \boxed{x \sim y \Leftrightarrow y \sim x} \quad \boxed{x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z.}$$

Перечисленные требования позволяют разбить множество X на *классы эквивалентных элементов*, совокупность которых называют *фактор-множеством.*

Другое часто используемое отношение на множестве X — *частичная упорядоченность*, каковой называют отношение $\leqslant$ ($\geqslant$), удовлетворяющее условиям:

$$\boxed{x \leqslant x} \quad \boxed{x \leqslant y \Leftrightarrow y \geqslant x} \quad \boxed{x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y.}$$

Преобразования. Функцию $f(x)$, преобразующую элементы из X в элементы Y, обозначают так:

$$\boxed{f : X \to Y.}$$

В случае $f(x) \equiv f_0(x)$ на $X_0 \subset X$, — функцию $f : X \to Y$ называют *продолжением* f_0 на X, а f_0 — *сужением* f на X_0.

Пусть S — граница открытого шара B. Тождественное отображение S на себя нельзя продолжить до непрерывного отображения $F : \overline{B} \to S$. (**?**)

1.2. Аксиома выбора

В тихом омуте, как говорится, черти водятся.

1.2.1. Аксиома выбора. *В любом семействе $\Phi = \{X_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых множеств X_α в каждом $X_\alpha \in \Phi$ можно выбрать по одному элементу, т. е. существует функция выбора $f : A \to \Phi$.*

Безобидный вроде бы факт. До 1904 г. им пользовались безотчетно, и ситуация, скорей всего, сохранялась бы долгое время, если бы Цермело не озвучил утверждение явно. Тут многие задумались, и стало ясно, что не все так просто. Обнаружились столь невероятные следствия, что от предпосылки впору было избавляться.

Парадокс Банаха—Тарского. *Шар B допускает разбиение на конечное число множеств $A_1, \ldots, A_k$, из которых можно составить передвижением A_j, как твердых тел (перенос плюс поворот), шар вдвое большего радиуса (или вдвое меньшего, или дюжину шаров такого же радиуса).*

Такого следствия вполне было достаточно для отказа от аксиомы, но тогда, как выяснилось, надо отказываться от других удобных и уже привычных инструментов[1]. В итоге математическая общественность смирилась с парадоксом, переосмыслив «катастрофу»[2], — и на сегодняшний день к аксиоме выбора принято относиться одобрительно.

На практике чаще пользуются следующими двумя утверждениями, эквивалентными аксиоме выбора.

1.2.2. Теорема Цермело. *На всяком множестве X можно ввести такое отношение порядка (вполне упорядочить[3] X), при котором у любого подмножества $A \subset X$ будет наименьший элемент $x^0 \in A$.*

1.2.3. Лемма Цорна. *Если в частично упорядоченном множестве X любое упорядоченное подмножество ограничено сверху (снизу), то в X существует максимальный (минимальный) элемент x^*.*

---

[1] Например, от эквивалентности определений непрерывности с помощью сходимости и (ε, δ)-технологии.

[2] Комментарии и другие примеры см. в [2].

[3] Отрезок $[0, 1]$ при обычном отношении $\geqslant$ не вполне упорядочен, поскольку у интервалов $(a, b) \subset [0, 1]$ нет наименьших элементов, и $[0, 1]$ никто еще не упорядочил (вполне) конструктивно.

Обратим внимание, что *наименьший элемент* A — это элемент $x^0 \in A$, меньший любого другого, $x^0 \leqslant x$, если $x \in A$. А *минимальный* (*максимальный*) *элемент* — это такой $x^* \in A$, что в A нет элемента меньшего (большего) x^*.

Логичнее было бы, конечно, использование терминов «аксиома Цермело» и «аксиома Цорна», поскольку «теорема» и «лемма» создают иллюзию строгой доказанности и оставляют за кадром точку опоры.

1.3. Неравенства

При изучении функциональных пространств часто используются несколько классических неравенств.

Неравенство Коши—Шварца:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right)^{1/2}}$$

и неравенство *Минковского*:

$$\boxed{\left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2\right]^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right)^{1/2}}$$

легко выводятся предельным переходом из конечномерных аналогов[4] — n устремляется к ∞ сначала справа[5], а потом — одновременно.

Справедливы также интегральные аналоги этих неравенств.

Универсальную роль играет *неравенство Гёльдера*[6]:

$$\int\limits_{\Omega} |x(t)| \cdot |y(t)|\, dt \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |y(t)|^q\, dt\right)^{1/q}, \qquad (1.1)$$

[4] В которых вместо ∞ стоит n.

[5] Чтобы гарантировать сходимость рядов, стоящих слева.

[6] При условии существования интегралов.

где

$$p, q \geqslant 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(это так называемые *сопряженные p и q*). При $p = q = 2$ неравенство Гёльдера переходит в *интегральное неравенство Коши—Шварца*.

Из (1.1) вытекает *интегральное неравенство Минковского*[7]:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |x(t) + y(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} + \left(\int\limits_{\Omega} |y(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

1.4. Метрические пространства

Множество X называется *метрическим пространством*, если на пáрах его элементов задано *расстояние* (*метрика*) $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям (аксиомам):

- $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Последнее неравенство называют *аксиомой треугольника*. Если не выполняется первая аксиома, функцию $\rho(x, y)$ называют *полуметрикой*.

> *В пробоину определения всегда пролезает что-нибудь непрошенное. Аксиомы метрики в этом отношении — не исключение. Именно поэтому многие «очевидные» факты требуют обоснования.*

О метрическом пространстве иногда говорят, что это пара (X, ρ) — множество X *элементов* (*точек*) $x \in X$, плюс заданная на $X \times X$ функция ρ. Подмножество $U \subset X$ с той же метрикой ρ называется *подпространством* X.

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1}). \quad (?)$$

$$|\rho(x, y) - \rho(x, z)| \leqslant \rho(y, z). \quad (?)$$

Евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ называется множество векторов

$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

[7] Доказательства можно найти в стандартных учебниках по функциональному анализу.

с метрикой

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

При $n = 1$ получается вещественная прямая $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$.

Пространство m ограниченных[8] числовых последовательностей

$$x = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

имеет метрику

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|.$$

Пространство $c \subset m$ *сходящихся* числовых последовательностей с той же метрикой — является подпространством m. (**?**)

Пространство l_2: элементами служат последовательности, удовлетворяющие условию $\sum^{\infty} x_i^2 < \infty$, а метрикой — функция

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Для проверки аксиомы треугольника здесь удобно опираться на классические *неравенства Коши—Шварца* и *Минковского*.

Количество примеров различных пространств по мере развития изложения будет возрастать. Иногда это раздражает, — мол, и так ясно. В данном случае примеры играют не только иллюстрирующую роль. Функциональный анализ в приложениях отличает как раз изобретательный подбор пространств «под решаемую задачу» — поэтому, чем шире палитра, тем легче найти что-нибудь подходящее.

1.5. Линейные пространства

Множество X часто обладает линейной структурой, т. е. его элементы можно складывать и умножать на числа по правилам, характерным для линейных структур.

[8] Удовлетворяющих условию $\sup_i |x_i| < \infty$.

В этом случае *линейное пространство*[9] X определяется как множество элементов, на котором заданы две операции: ***сумма*** $x + y$ и ***произведение*** λx (элемента $x \in X$ на число λ из некоторого поля[10]), причем

$$x, y \in X \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \in X,$$

а сами операции удовлетворяют следующим аксиомам:

- существует «единица»: $1 \cdot x = x$,
- $\lambda(\mu x) = \lambda\mu x$ (*ассоциативность умножения*),
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

а также:

1) $x + y = y + x$ (*коммутативность сложения*),
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность сложения*),
3) существует *нулевой элемент* $0 \in X$ такой, что $x + 0 = x$,
4) существует *обратный элемент* $-x$ такой, что $x + (-x) = 0$.

Примерами линейных пространств могут служить: совокупности всех непрерывных функций (на заданном промежутке), либо — ограниченных, либо — дифференцируемых, либо — удовлетворяющих некоторому дифференциальному уравнению. А также: совокупности полиномов, степенных или тригонометрических, фиксированной или любой степени; множество бесконечных последовательностей с естественными операциями сложения и умножения; множество матриц и т. п.

Два линейных пространства X и Y считаются *изоморфными*, если между их элементами и линейными операциями может быть установлено взаимно однозначное соответствие. *Все конечномерные линейные пространства n измерений изоморфны друг другу.*

Непустое подмножество $X_0 \subset X$ называют *линейным многообразием*, если принадлежность любого числа точек $x_k \in X_0$ влечет за собой принадлежность X_0 *линейных комбинаций*:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in X_0. \tag{1.2}$$

[9] Линейное пространство называют также *векторным пространством*.

[10] Пространство называют комплексным, если λ принадлежит комплексной плоскости, $\lambda \in \mathbb{C}$, и — вещественным, если $\lambda \in \mathbb{R}$.

Множество всевозможных линейных комбинаций (1.2) при заданном наборе $x_1, \dots, x_n$ образует линейное *пространство*, *порожденное* векторами $x_1, \dots, x_n$ (*натянутое на* $x_1, \dots, x_n$). Совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из $\Omega \subset X$ называют *линейной оболочкой* множества Ω.

• Пусть $X_1, \dots, X_n$ — линейные многообразия X. Если каждый элемент $x \in X$ однозначно представим в виде

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \quad \text{где все} \quad x_k \in X_k,$$

то говорят, что X — *прямая сумма* линейных многообразий X_k и пишут

$$\boxed{X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n.}$$

• Обычная *сумма множеств* $X + Y$ определяется как множество элементов

$$z = x + y, \quad x \in X, \ y \in Y.$$

Элементы $x_1, \dots, x_n$ называют *линейно зависимыми* (*независимыми*), если существует (не существует) такая невырожденная[11] линейная комбинация, что

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

Бесконечная система элементов линейно независима, если любой **конечный** набор из нее линейно независим.

Линейно независимая система $\{e_\alpha\}$ называется *базисом Гамеля*, если каждый элемент $x \in X$ представим в виде **конечного** числа элементов из $\{e_\alpha\}$. У всякой линейной системы, в том числе у вещественной прямой, существует базис Гамеля[12], что устанавливается с опорой на аксиому выбора.

Пространство X имеет *размерность* $\dim X = n$, если в X существует n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ точек в X — линейно зависимы. При существовании в X сколь угодно большого числа линейно независимых элементов пространство X считается *бесконечномерным*, $\dim X = \infty$.

---

[11] Не все $\lambda_j = 0$.

[12] О неожиданных следствиях из существования базиса Гамеля см. [2].

Нормированным пространством называют линейное пространство X с заданной на нем *нормой* (скалярной функцией) $||x||$, обязанной удовлетворять условиям:

$$||x|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad ||x|| \geqslant 0, \quad ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$

и *неравенству треугольника*

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||.$$

Метрика в X определяется по правилу:

$$\boxed{\rho(x, y) = ||x - y||.}$$

Функцию $p(x)$ называют *полунормой*, если она удовлетворяет всем требованиям к норме, за исключением $p(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Скалярное произведение элементов x, y вещественного линейного пространства X определяется как функция $\langle x, y\rangle$, принимающая вещественные значения и удовлетворяющая условиям:

- $\langle x, x\rangle$ — *обязательно вещественное число, строго большее нуля при ненулевом* x *и равное нулю только при* $x = 0$,
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
- $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

В случае *комплексного пространства* вводятся небольшие видоизменения. Во-первых, произведение $\langle x, y\rangle$ может принимать комплексные значения. Во-вторых, аксиома $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ заменяется более общим требованием $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение[13].

Заметим, что $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, но $\boxed{\langle x, \lambda y\rangle = \lambda^*\langle x, y\rangle}$, поскольку

$$\langle x, \lambda y\rangle = \langle \lambda y, x\rangle^* = \lambda^*\langle y, x\rangle^* = \lambda^*\langle x, y\rangle.$$

Скалярное произведение позволяет ввести в X норму

$$\boxed{||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2},}$$

[13] $(\alpha + i\beta)^* = \overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta$.

и в итоге — метрику:

$$\rho(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}.$$

Перечисленным требованиям в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет стандартное[14)]

$$\langle x, y \rangle = \sum_j x_j y_j,$$

а также $\langle Vx, y \rangle$ с положительно определенной матрицей V.

Для интегрируемых функций скалярным произведением часто служит

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\, dt.$$

Пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных функций $u(x)$, заданных и ограниченных на замыкании $\overline{\Omega}$ *области*[15)] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, определяется с помощью нормы

$$||u|| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Справедливость неравенства треугольника очевидна:

$$||u + v|| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x) + v(x)| \leqslant \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)| = ||u|| + ||v||,$$

остальное — тем более.

В случае *ограниченной* области Ω операцию «sup» можно заменить на «max», и об ограниченности $u(x)$ — не упоминать.

1.6. Непрерывные преобразования

Функцию (оператор) $f : X \to Y$ называют непрерывной в точке x_0, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что[16)]

$$\rho_Y[f(x), f(x_0)] < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \rho_X(x, x_0) < \delta,$$

и непрерывной на X, если она непрерывна в любой точке X.

---

14) Либо $\langle x, y \rangle = \sum_j x_j y_j^*$ в комплексном варианте пространства.

15) *Областью* называется непустое связное и открытое множество.

16) Индекс у ρ указывает, о метрике какого пространства идет речь.

• Другими словами, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $f(x) \to f(x_0)$ при условии $x \to x_0$.

• Функция $f : X \to Y$ называется *равномерно непрерывной* на X, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что

$$\rho_Y[f(x), f(y)] < \varepsilon$$

для любых $x, y \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho_X(x, y) < \delta$.

С изучением отображений связаны многочисленные понятия. Ниже дается краткий комментарий. Без какой-то части терминов можно было бы обойтись, но они уже внедрились в лексикон, и их проще выучить, чем бороться за рациональный словарь.

• В случае $f : X \to \mathbb{R}$ функцию f называют *функционалом*.

• В ситуации $y = f(x)$ элемент y считается *образом* x, а совокупность элементов x, образом которых служит y, — *прообразом*[17] y. Прообраз y записывают как $f^{-1}(y)$.

• Множество значений $f(X) \subset Y$ именуют *образом* X. А при совпадении, $f(X) = Y$ говорят, что f — *сюръективное отображение*, или *отображение «на»*. В общем случае $f : X \to Y$ говорят, что f отображает X «в» Y.

• Если образы различных элементов $x_1 \neq x_2$ не совпадают, f называют *инъективным отображением*, или *инъекцией*. В этом случае уравнение $y = f(x)$ имеет (если имеет) единственное решение $x = f^{-1}(y)$, где f^{-1} называют *обратным отображением*, которое может быть определено не на всем Y. Но если f еще и *сюръекция*, то $f^{-1} : Y \to X$.

В монотонном списке заслуживает выделения понятие *гомеоморфизма*, каковым называют взаимно однозначное (инъективное плюс сюръективное) и взаимно непрерывное (непрерывны как f, так и f^{-1})[18] отображение $f : X \to Y$. Пространства, между которыми можно установить гомеоморфизм, считаются *гомеоморфными*. Отображение называют *локальным гомеоморфизмом*, если у любой

---

[17] Либо *полным прообразом*, оставляя за термином «прообраз» любой элемент x, переходящий в y.

[18] Возможность взаимно однозначного соответствия, непрерывного только в одну сторону — кажется сомнительной, но в этом мире случается все, что не запрещено — см. [5].

пары точек x, y такой, что $f(x) = y$, найдутся окрестности, гомеоморфно отображаемые (с помощью f) друг на друга[19].

Если между элементами пространств X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие $f : X \to Y$ так, чтобы расстояние между элементами одного пространства равнялось расстоянию между соответствующими элементами другого, то X и Y называют *изометричными*, а f — *изометрией*. При рассмотрении сходимости или полноты — изометричные пространства можно считать идентичными.

Линейные операторы и функционалы. Пусть X и Y — линейные пространства. Оператор $A : X \to Y$ называется *линейным*, если он *аддитивен*:

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

и *однороден*:

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Разумеется, это записывается короче:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Ax_1 + \beta Ax_2,$$

но «деление на две части» позволяет отдельно ссылаться на аддитивность и однородность.

Аргумент линейного оператора обычно пишут без скобок. Множество $\mathbf{D}_A$ элементов x, для которых определено значение Ax, — называют *областью определения* A, а $\mathbf{R}_A = A\mathbf{D}_A$ — *областью значений*.

Множество решений уравнения $Ax = 0$ называют *нуль-пространством* (*ядром*) оператора A и обозначают $\ker A$.

В случае $f : X \to \mathbb{R}$ оператор f называют *линейным функционалом*.

О линейных функциях на вещественной прямой принято думать как о зависимостях $y = kx + b$. Без предположения непрерывности это неправильно.

[19] Резиновое кольцо (тор) разрезаем (по меридиану), один конец перекручиваем на один оборот и склеиваем (как было). Операция соответствует непрерывному отображению F тора на себя, которое, очевидно, является локальным гомеоморфизмом, но его нельзя расширить до гомеоморфизма $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^3$. (**?**)

Линейные функции даже на $\mathbb{R}$ бывают разрывными [2], но для их «построения» требуется аксиома выбора, базисы Гамеля и прочая экзотика. В бесконечномерных пространствах разрывные линейные операторы строятся проще.

При рассмотрении скалярных функций n переменных

$$x = \{x_1, \dots, x_n\}$$

удобны стенографические трюки:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_n^{\alpha_n}, \qquad f^{(\alpha)}(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

с помощью которых даже ряд Тэйлора для функции n переменных записывается в привычном на вещественной прямой виде:

$$f(x+z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{f^\alpha(x) x^\alpha}{\alpha!}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

1.7. Выпуклость

Подмножество X линейного пространства E называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $x, y \in X$ оно содержит *отрезок*, их соединяющий,

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in X, \quad \lambda \in [0, 1],$$

а скалярная функция $\varphi(x)$ *выпукла*, если

$$\varphi[\lambda x + (1-\lambda)y] \leqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \quad \lambda \in [0,1].$$

Линейную комбинацию $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ точек $\{x_1, \dots, x_n\}$, при условии $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, считают *выпуклой*.

Наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее $\Omega \subset E$, называется *выпуклой оболочкой* множества Ω и обозначается $\mathrm{co}\{\Omega\}$.

Множество Ω называется *уравновешенным*, если

$$x \in \Omega, \ |\lambda| \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in \Omega.$$

Другими словами, множество уравновешено, если центрально симметрично и все его точки «видны» из центра.

Множество Ω определяется как *поглощающее*, если для любого $x \in X$ можно указать такое $\lambda > 0$, что $\lambda x \in \Omega$.

Функция $p(x) = \inf \lambda^{-1}$, если Ω уравновешенное и поглощающее, является *полунормой*, ее называют еще *калибровочной функцией* или *функционалом Минковского*.

- Если множества A и B выпуклы, то $A \cap B$ и $A + B$ тоже выпуклы (но $A \cup B$ — не обязательно).

- Если множество S выпукло и все $x_n \in S$, то бесконечная сумма $\sum^{\infty} \lambda_k x_k$, где $\sum^{\infty} \lambda_k = 1$ и все $\lambda_k \geqslant 0$, — не обязана (!) принадлежать S (см. *идеальная выпуклость*).

1.8. Предварительные «неприятности»

Приступая к вопросам изучения функций на множествах, имеет смысл поместить в фокус внимания некоторые факты, напоминающие, что не все так просто как иногда кажется.

Канторово множество. Бесконечность, втиснутая в ограниченный диапазон $[0, 1]$, искрит аномалиями. Образцовые патологии наблюдаются в *канторовом множестве*, получаемом последовательным выбрасыванием третей из сегмента $[0, 1]$. Сначала $[0, 1]$ делится на три равные части, и средняя часть удаляется. С каждой из оставшихся частей повторяется аналогичная операция — и так до бесконечности. В пределе от $[0, 1]$ почти ничего не остается, что и называется *канторовым множеством* C. Длина выброшенных третей равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = 1,$$

т. е. «вся длина» $[0, 1]$ выбрасывается. Однако оставшееся «тощее» множество C оказывается *равномощно континууму*[20], что и представляет главный сюрприз.

Все это достаточно хорошо известно, но некоторые важные детали остаются вне поля зрения из-за нынешнего ритма жизни, при котором бо́льшая часть информации не осознается. В то же время канторово множество лежит в основе построения многих примеров, интересных с точки зрения теории функций. Поэтому имеет смысл задержаться на некоторых особенностях, имеющих обыкновение проскальзывать мимо ушей.

---

[20] Множества *равномощны*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. *Континуумом* принято считать отрезок $[0, 1]$.

Интуитивно кажется, что C составляют концы выброшенных интервалов, но $\boxed{\text{это не так}}$, потому что тогда C было бы счетно. Но C не счетно, поскольку состоит из чисел вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$, где a_k принимают значения 0 или 2, т.е. из чисел, в троичной записи которых не встречается единица. Последовательностей же $a_1, a_2, \ldots$, где a_k могут принимать два разных значения (как при двоичной записи числа), — несчетное количество[21].

Концы выброшенных интервалов в C называют точками *первого рода*, остальные — *второго рода*.

С точки зрения измерения длины интересно видоизменение рассмотренного сценария. Пусть a_n — последовательность нечетных чисел. Разделим $[0, 1]$ на a_1 частей и среднюю часть удалим. Каждую из оставшихся частей на втором шаге разделим на a_2 частей и средние — опять удалим, и так до бесконечности. В пределе получится некий аналог канторова множества C_a, мера которого будет определяться бесконечным произведением

$$l(C_a) = \prod_{j}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a_j}\right)$$

и может быть сделана выбором последовательности $\{a_n\}$ любой в диапазоне $[0, 1)$. В то же время C_a, как и C, не имеет ни одной внутренней точки, — и проблема измерения длины перестает выглядеть элементарной.

Канторова лестница. Канторово множество служит источником построения многих аномалий. Пусть, например, функция $f : [0, 1] \to [0, 1]$ на *замыкании* каждого выбрасываемого (в процессе построения канторова множества) интервала — принимает значение, равное середине этого интервала. Доопределение $f(x)$ в точках второго рода по непрерывности[22] дает *непрерывную*[23] *монотонную* функцию $f(x)$, *производная* которой *почти всюду равна нулю*, — тем не менее $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Другими словами, $f(x)$ почти нигде на $[0, 1]$ не растет, но успевает ощутимо вырасти на множестве нулевой меры. В результате

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = 0, \quad \text{но не} \quad \int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = 1.$$

---

[21] Здесь об этом говорится бегло в расчете на читателя, прошедшего огонь, воду и медные трубы. Особенно, воду.

Кстати, функция, переводящая точку $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ в точку $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}$ — непрерывна и отображает канторово множество C **на** $[0, 1]$.

[22] В точках второго рода $\tilde{x}$ полагается $f(\tilde{x}) = \lim f(x_k)$, где $x_k \to \tilde{x}$ и все x_k — точки первого рода.

[23] А значит, и равномерно непрерывную.

Глава 2

Метрические и нормированные пространства

Службы обеспечения (транспорт, дороги, склады, связь) съедают все ресурсы. На основной процесс почти ничего не остается, да и не требуется. Это общая закономерность. Поэтому не стоит удивляться, что в математике усилия концентрируются на приготовлениях и сопровождении.

2.1. Метрическая идеология

Главные задачи на прицеле — это, конечно, $Lx = y(t)$, где

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x,$$

либо $Lx = \dot{x} - A(t)\,x$ в $\mathbb{R}^n$, либо — оператор с частными производными [1].

Интегральные уравнения — оборотная сторона медали. Обращение L в задаче $Lx = y(t)$ *при определенных начальных или краевых условиях* имеет вид

$$x(t) = L^{-1}f(t) = \int\limits_{\Omega} G(t,s)y(s)\,ds,$$

где $G(t,s)$ называют *функцией Грина* [2]. О $G(t,s)$ еще говорят как о *ядре интегрального оператора*.

Если в исходной задаче $y(t) = x(t)$ либо $y(t) = f[t, x(t)]$, возникают интегральные уравнения

$$x(t) = \int\limits_{\Omega} G(t,s)x(s)\,ds \quad \text{либо} \quad x(t) = \int\limits_{\Omega} G(t,s)f[s,x(s)]\,ds.$$

Вот, собственно, и все задачи, которые хотелось бы иметь в поле зрения. Но есть соблазн подняться выше по лестнице абстракции, чтобы все уместилось в одну схему. Единообразное описание таких задач $\boxed{Ax = y}$ характеризуется линейным оператором A, преобразующим функции («векторы») $x(t)$ в $y(t)$. Однако на этой

---

[1] На подступах к функциональному анализу естественно предполагать кое-что известным, ибо дифуры и линейная алгебра уже пройдены.

[2] См.: *Босс В.* Лекции по математике: Дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: УРСС, 2004.

ступеньке горизонт так отодвигается, что в поле зрения попадает всякая «шелуха», и ее приходится изучать, ибо промежуточных ступенек нет. В результате учебники начинаются с рассмотрения причудливых операторов и диковинных метрик, в которых шар меньшего радиуса содержит шар большего. Нормальная психика, полагая, что ей морочат голову, пытается уйти прочь к другому ремеслу. А «шелуха»-то при ближайшем рассмотрении оказывается удобным инструментом. Пространство каких нибудь «слипшихся точек» может сразу указать на ошибочность общей теоремы или подтолкнуть мысль в перспективном направлении.

Разумно, конечно, не зацикливаться на функциях, считая «векторы» $x \in X$ и $y \in Y$ элементами некоторых пространств. Модель становится более вместительной, в том числе — для линейной алгебры, что вселяет надежду получения общих результатов, опираясь на аналогию. Но ожидания оправдываются в незначительной степени. Бесконечномерные пространства — это другая планета, другие законы. В $\mathbb{R}^3$, например, сфера непрерывной деформацией не стягивается *по себе* в точку. В бесконечномерном пространстве это возможно [2].

Функциональные пространства. Что бы там ни говорилось, главная ориентация функционального анализа — множества функций с мерой близости

$$\rho(v, w) = \sup_t |v(t) - w(t)|, \tag{2.1}$$

либо

$$\rho(v, w) = \int_0^1 |v(t) - w(t)|\, dt, \tag{2.2}$$

либо с какой-нибудь еще, но метрики (2.1) и (2.2) служат представителями двух основных категорий.

Дело в том, что на практике бесчисленные ручейки вопросов от «$Ax = y$» стекаются в русло, где основной проблемой оказывается аргумент, а не оператор. Что из себя представляют x и y? За какую веревочку ни потянешь, все в это упирается. Нужна непрерывность оператора — приходится оговаривать близость аргументов и значений. А функции могут быть близки равномерно, поточечно, в среднем — и еще миллион возможностей. Чтобы все это смотрелось с единых позиций, — вводятся общие схемы.

Попытка абстрагироваться от частностей (2.1), (2.2) ведет к понятию метрического пространства. В результате первая же фраза: «Пусть на X задана метрика» — допускает к рассмотрению океан возможностей, каковые сами по себе даже не представляют интереса, но входят в себестоимость достигаемой общности. Хотим мы того или нет, в сектор прицела попадает масса аномальных ситуаций, вплоть до неархимедовых метрик[3]. В поле зрения оказываются и менее экзотические экспонаты, которые непосредственной практической значимости не имеют, зато с их помощью строится забор контрпримеров на пути заблуждений общего характера. В результате возникает внутренняя кухня, создающая впечатление, что функциональный анализ развивается сам для себя, не особо интересуясь приложениями. На 99 % это так и есть, но для приложений — хватает.

Широта понятия метрического пространства подталкивает к поиску специфики, которая бы сузила диапазон. На этом пути возникают *банаховы* и *гильбертовы* пространства (полные пространства с нормой и скалярным произведением). Общность ограничивается, но результаты усиливаются.

В гильбертовых пространствах существенную роль начинают играть ортогональные разложения функций (ряды Фурье)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x).$$

По аналогии с конечномерным случаем, $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, величины c_k считаются координатами, а функции $\varphi_k(x)$ — базисными векторами бесконечномерного пространства.

2.2. Открытые и замкнутые множества

Инструменты и декорации функционального анализа в большинстве случаев представляют собой обобщения конечномерных аналогов. Многие понятия и факты похожи. Это создает приятное ощущение знакомых мест, но постепенно усыпляет бдительность, без которой легко угодить в ловушки, которыми богата изучаемая область.

[3] В которых все внутренние точки шара являются центрами — см.: *Скворцов В. А.* Примеры метрических пространств. МЦНМО, 2002 (Б-ка «Матем. просвещение». Вып. 16).

• *Открытым* (*замкнутым*) шаром $B(r, y)$ (*радиуса* $r > 0$ с *центром* y) в метрическом пространстве (X, ρ) называется совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < r$ (соответственно, $\rho(x, y) \leqslant r$).

• *Окрестностью* точки $z \in X$ назовем (пока) любой открытый шар с центром в этой точке[4], а ε-окрестностью $z \in X$ — шар $B(\varepsilon, z)$, $\varepsilon > 0$.

• Элемент $u \in X$ считается *предельной точкой* множества $U \subset X$, если любая окрестность u содержит хотя бы одну точку из U помимо самой u. Предельные точки называют также *точками сгущения*.

• Множество $U \subset X$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $u \in U$ оно содержит некоторую окрестность u, и — *замкнуто*, если содержит все свои предельные точки.

• Множество $\overline{U}$, полученное присоединением к U всех его предельных точек, называется *замыканием* U.

Подсознание знакомо с понятием длины не по учебникам. Поэтому когда расстояние объявляется функцией, удовлетворяющей неким аксиомам, — интуиция продолжает «думать» о $\rho(x, y)$ как о хорошо известной вещи. Но «аксиомы» от обычной метрики мало что оставляют[5]. Поэтому утверждения метрического характера, несмотря на их обманчивую тривиальность, необходимо уметь доказывать, пользуясь только разрешенными средствами (свойствами, оговоренными в определениях).

Факты (либо упражнения):

- *Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*
- *Объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*
- *Дополнение замкнутого (открытого) множества до всего пространства есть открытое (замкнутое) множество.*
- *Замыкание любого множества замкнуто.* (!)[6]
- $U \subset V \Rightarrow \overline{U} \subset \overline{V}$, $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

---

[4] При топологическом взгляде на предмет (глава 5) окрестностью точки $z \in X$ называется любое открытое множество, содержащее точки z.

[5] См. раздел 2.8.

[6] Не будут ли последовательности из предельных точек давать *новые* предельные точки?

Перечисленные утверждения достаточно важны и принципиальны для ориентации в метрических пространствах, а их обоснования не все укладываются «в две строчки». Тем не менее доказательства здесь опущены — по трем причинам. Во-первых, они есть во всех учебниках. Во-вторых, от них веет скукой. В-третьих, идеологически они достаточно просты для самостоятельного воспроизведения. Этот комплект причин работает и дальше — в тех случаях, когда доказательства носят рутинный характер, а утверждения находятся вдали от «столбовой дороги». К подобной категории здесь отнесен даже следующий фундаментальный факт.

2.2.1. Теорема отделимости. *Если два замкнутых множества* U_1, $U_2 \subset X$ *не пересекаются, то существуют два открытых множества* W_1 *и* W_2 *таких, что*

$$U_1 \subset W_1, \quad U_2 \subset W_2 \quad \text{и} \quad W_1 \cap W_2 = \varnothing.$$

Иллюзия очевидности возникает из-за того, что подсознание примеряет факты к простым фигурам на плоскости. Поэтому обоснование необходимо, но при некоторой настойчивости оно может быть получено самостоятельно либо, в случае устремленности «за горизонт», — заменено ссылкой [11].

Самостоятельное доказательство некоторых краеугольных результатов анализа может показаться «перебором». Но это вполне посильные вещи. При готовых определениях и формулировках — доказывать легко, хотя принято думать иначе. Трудно изобретать понятия и выдвигать гипотезы.

Вот еще порция определений, которые удобно оговорить заранее.

- Множество $U \subset X$ *ограниченно*, если заключено в некотором шаре.

- *Внутренняя точка* $u \in U$ определяется наличием окрестности, целиком лежащей в U.

- Элемент $u \in U \subset X$, не являющийся предельной точкой U, называется *изолированной* точкой U.

- Замкнутое множество $U \subset X$, не содержащее изолированных точек, называют *совершенным*.

- Метрическое пространство X считается *связным*, если оно не представимо в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств.

• Говорят, что множество U *плотно* в множестве $V \subset X$, если замыкание $\overline{U} \supset V$, а в случае $V = X$ — говорят, что U — *всюду плотно*. Метрическое пространство X, в котором существует счетное всюду плотное множество, называют *сепарабельным*.

• Множество U метрического пространства X называется *нигде не плотным*, если любой шар из X содержит в себе шар, не пересекающийся с U.

Примеры

- В $C[0, 1]$ множество функций $U = \{x(t) : A < x(t) < B\}$ открыто, а множество $U = \{x(t) : x(0) = 0\}$ замкнуто.
- В l_2 множество последовательностей $\{x_n\}$ при условии $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ — замкнуто.
- На вещественной прямой $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ множество рациональных точек всюду плотно, а поскольку еще и счетно, то $\mathbb{R}$ сепарабельно.

2.3. Сходимость

Последовательность $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ точек метрического пространства X называется *сходящейся*, если существует точка $x \in X$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

• Чтобы точка x была предельной точкой множества U, необходимо и достаточно существование последовательности $\{x_n\}$ с попарно различными элементами, сходящейся к x [7]. (!?)

Требование попарного различия элементов часто опускают — и тогда формулировка неточна, ибо не годится последовательность $\{x_n\}$, у которой, начиная с некоторого N, все $x_n = x$, $n > N$. Разумеется, «попарное различие» — один из возможных вариантов. Его можно заменить, скажем, условием, что встречаются $x_n \neq x$ со сколь угодно большими номерами.

• У сходящейся последовательности $\{x_n\}$ любая *подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ сходится к тому же пределу.

[7] Этот факт позволяет заменить определение *предельной точки* x требованием *существования сходящейся последовательности* $x_n \to x$ *с попарно различными элементами*.

• Сходимость $x_n \to x$ можно определить (равносильно) как возможность по любому $\varepsilon > 0$ указать такое N, что

$$\rho(x_n, x) < \varepsilon \qquad \text{для всех} \qquad n > N.$$

У определения сходимости есть червоточинка: опора на предельную точку x, к которой сходится $\{x_n\}$. Это иногда создает безвыходное положение, $x_n \to x$, но x не «вычисляется», а значит, не удается установить сходимость. В то же время возникает ощущение, что сходимость является «внутренним» свойством последовательности $\{x_n\}$, не зависящим от посторонней точки x. Это не так, но «в этом что-то есть».

2.3.1. Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, или **последовательностью Коши**, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

для любых $n, m > N$.

Иными словами, у последовательности Коши члены с большими номерами не могут сильно отличаться друг от друга, и

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(x_n, x_m) = 0.$$

Фундаментальные последовательности называют также *сходящимися в себе.*

На вещественной прямой работает **критерий Коши**: *последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ сходится в том и только том случае, когда она фундаментальна.*

В произвольном метрическом пространстве (X, ρ) это уже не так. Принципиальную роль играет полнота X.

2.3.2. *Метрическое пространство (X, ρ) называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность сходится в X.*

Полнота — это, пожалуй, самое главное, что определяет успех функционального анализа в приложениях. Потому что основная трудность при работе с интегральными и дифференциальными уравнениями либо вариационными задачами заключена в предельных переходах. И проблема не только в обосновании — дескать, результат получен, но как бы его причесать, чтобы не стыдно было показывать. Проблема часто упирается в катастрофические ошибки, если манипуляции исполняются без договоренности и понимания, в каком функциональном пространстве все происходит.

Обоснование полноты пространства — это серьезная задача. Редко — простая, чаще — сложная, о чем свидетельствует пример вещественной прямой, полнота которой была установлена в XIX в. в результате нелегких изысканий [8].

• Полнота $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ упрощает анализ более сложных конструкций. Например, сходимость по норме в $C(\overline{\Omega})$ — это равномерная сходимость, а поскольку равномерный предел последовательности непрерывных функций — непрерывная функция, то $C(\overline{\Omega})$ — полное пространство. К полноте $\mathbb{R}$ от «теоремы о равномерной сходимости» — ретроспективно ведет длинная цепочка результатов.

• Пространство l_2 также полно. Обоснование технически довольно громоздко, но его можно найти в любом учебнике — см. [11, 15].

• Полнота X при переходе к замкнутому подпространству $U \subset X$ — сохраняется. (?)

• Метрическое пространство непрерывных функций $x(t)$ на $[0, 1]$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \left[\int_0^1 [x(t) - y(t)]^2\, dt\right]^{1/2}$$

неполно. (?)

2.3.3. Теорема о вложенных шарах. *В полном метрическом пространстве X пересечение любой последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров $\overline{B}(r_n, x_n)$, радиусы которых стремятся к нулю* [9]*, непусто.*

◄ В силу $\overline{B}(r_1, x_1) \supset \ldots \supset \overline{B}(r_n, x_n) \supset \ldots$, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, поскольку $r_n \to 0$ и

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant r_n,$$

что следует из $x_m \in \overline{B}(r_n, x_n)$ при $m > n$, так как $\overline{B}(r_m, x_m) \subset \overline{B}(r_n, x_n)$.

Полнота X гарантирует существование предела $\{x_n\} \to x^*$. Остается показать, что $x^* \in \overline{B}(r_k, x_k)$ при любом k.

[8] См.: *Босс В.* Лекции по математике: Анализ. Т. 1. М.: УРСС, 2004 — о дедекиндовых сечениях.

[9] Если речь идет о банаховом пространстве, то условие $r_n \to 0$ необязательно — см. раздел 2.8.

Это почти очевидно. Фиксируем любое k. Последовательность

$$\{x_{k+n}\} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

сходящаяся к тому же пределу x^*, лежит в замкнутом шаре $\overline{B}(r_k, x_k)$. Поэтому $x^* \in \overline{B}(r_k, x_k)$ при любом k. Тот факт, что в пересечении всех $\overline{B}(r_k, x_k)$ нет других точек, кроме x^*, — вытекает из $r_n \to 0$. ▶

Как ни удивительно, но *без требования $r_n \to 0$ пересечение всех $\overline{B}(r_k, x_k)$ может оказаться пустым* (см. раздел 2.8). Это еще один штрих на тему того, что стоит за аксиомами метрики.

Теорема 2.3.3 сохраняет силу при замене шаров вложенными друг в друга замкнутыми множествами, *диаметры* которых стремятся к нулю[10].

2.4. Пополнение

Пополнение пространства — главная проблема анализа. В классике — это набившее оскомину заполнение вещественной прямой. Из-за привычности тема выглядит банальной. Без пищеварения, дескать, нет жизни, но что об этом говорить. В функциональных пространствах соответствующая процедура идет наощупь и выглядит более таинственно, что иным образом фокусирует внимание. А вся разница — в наличии и отсутствии интуитивных образов. Заблуждение насчет сплошной прямой подсознание научилось воспринимать за истину.

На примере $(-\infty, \infty)$ удобно рассмотреть идею в целом. Существуют ли иррациональные числа? Не существуют[11]. Можно ли обойтись без них? Можно[12].

Звучит вызывающе, но это правильно или неправильно — в зависимости от принимаемой легенды (модели). Образ сплошной вещественной оси преобладает, конечно, над альтернативными

---

[10] *Диаметром* ограниченного множества A в метрическом пространстве X называют число $d(A) = \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x, y)$.

[11] Разве что, как выдумка.

[12] С тем же успехом можно говорить «нельзя». На вопрос «можно ли обойтись без того, что не существует?» — хорош любой ответ.

точками зрения. Но так ли необходимо заполнение гребенки рациональных чисел? Каковы аргументы «за»?

Обычно ссылаются на катастрофу в анализе. Без иррациональных чисел, мол, становятся невозможны предельные переходы, на которых стоит интегрирование и дифференцирование. Это опять-таки правильно и неправильно одновременно. Можно вполне обойтись рациональными числами, потеряв некоторые удобства. Посмотрим, как это сделать.

Иррациональные числа как точки прямой — вопрос «сказочный». Во внутренней кухне формальной теории — это предельные точки последовательностей $\{x_n\}$ рациональных чисел. С другой стороны, вместо $x_n \to x$ можно пользоваться альтернативным определением *внутренней сходимости*, которой обладают *фундаментальные последовательности*, характеризуемые условием

$$|x_n - x_m| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty,$$

и тогда сам предел x не нужен.

Иными словами, иррациональные числа позволяют сильно укоротить неуклюжие выражения типа «если значения переменных задавать возрастающим числом десятичных знаков, то число верных знаков в ответе будет возрастать». При незаполненной вещественной прямой определение производной превращается в пытку.

Понятно, что весь «Анализ» можно переделать, оставив только рациональные числа и фундаментальные последовательности вместо иррациональных муляжей. Но здесь, собственно, ничего нового нет, кроме терминологии. Иррациональная точка на прямой — чисто гуманитарное изобретение. Формально, это эквивалент фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ рациональных чисел[13]. Точнее говоря, эквивалент группы «одинаковых» последовательностей с критерием одинаковости:

$$|x_n - y_n| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.3}$$

Нежелание оперировать предельными точками x обошлось бы необходимостью манипулирования фактор-множествами последовательностей и классами эквивалентности в смысле (2.3). От такой математики население бросилось бы врассыпную. А дело-то все в точке зрения на один и тот же предмет. Пресловутые фактор-множества фундаментальных последовательностей, обозначенные

[13] Здесь схоластичное на вид понятие изоморфизма приходится кстати.

через x, дают повод задуматься. Есть ли разница, собственно? Никакой, не считая неудобств. Поэтому сплошная ось в «Анализе» — образ надматематический. Иррациональные точки удобны в голове.

В функциональных пространствах на абстрактном уровне ситуация аналогичная. С той лишь разницей, что нет такого удобного для подсознания образа, как вещественная прямая. Существуют ли, скажем, суммируемые функции — вопрос риторический. Существуют в том же самом смысле, что и вещественные числа. Вариантов, правда, в функциональных пространствах много. Вопрос «что и как пополнять» имеет большое количество разумных ответов.

Общая схема. Пополнение множества рациональных чисел с метрикой

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

порождает вещественную прямую $\mathbb{R}$. Аналогичный трюк можно проделать с любым метрическим пространством.

2.4.1. Определение. *Полное метрическое пространство $\widehat{X}$ называется **пополнением** пространства X, если X — подпространство $\widehat{X}$, причем X всюду плотно в $\widehat{X}$.*

2.4.2. Теорема. *Любое метрическое пространство X имеет единственное (с точностью до изометрии) пополнение $\widehat{X}$.*

◄ В общем случае работает та же идея, что и в теории действительных чисел. Техническое исполнение — даже проще, поскольку для вновь вводимых объектов, типа иррациональных чисел, не надо определять арифметические операции. Некоторое усложнение, с другой стороны, порождает отсутствие упорядоченности элементов из X.

Изометричный вариант $\widehat{X}$ конструируется с помощью самих фундаментальных последовательностей $\{x_n\} \subset X$, которые разбиваются на классы. Две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ относят к одному классу, если

$$\rho(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$, как легко видеть, принадлежит одному и только одному классу $\widehat{x}$, а класс $\widehat{x}$ определяется любой принадлежащей ему последовательностью. Эти классы принимаются за элементы нового метрического пространства $\widehat{X}$ с метрикой

$$\rho(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n), \tag{2.4}$$

где $\{x_n\} \in \widehat{x}$, $\{y_n\} \in \widehat{y}$ — произвольные представители своих классов.

Вот, собственно, и все — если по сути. Техническая несколько громоздкая часть [8, 11] сводится к проверке того, что (2.4) действительно метрика, а $\widehat{X}$ — полно по этой метрике.

Последний этап заключается в проверке того, что X (с точностью до изометрии) можно рассматривать как подпространство $\widehat{X}$, плотное в $\widehat{X}$. ►

В приложениях пополнение обычно строится иначе — с помощью конструкции, опирающейся на следующий факт.

2.4.3. Лемма. *Подпространство X_0 полного метрического пространства X полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X.* (?)

Поэтому интересующее множество U достаточно погрузить в полное метрическое пространство X и там взять его замыкание $\overline{U}$ — это и будет пополнением U.

2.5. Категории Бэра

Множество $U \subset X$ называется *множеством первой категории*, если оно представимо в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории.*

Множество рациональных точек вещественной прямой является множеством первой категории, а множество иррациональных — второй.

Категорные идеи возникли при выяснении того, насколько плох может быть предел непрерывных функций. *Поточечный предел на* $[0, 1]$ *всюду сходящейся последовательности непрерывных функций является функцией непрерывной всюду, за исключением множества точек первой категории*[14] (Бэр). Отсюда следует (?), что производная дифференцируемой функции не может быть всюду разрывной. Множество ее точек разрыва — множество точек первой категории.

2.5.1. Теорема Бэра о категории. *Полное метрическое пространство есть множество второй категории.*

Эквивалентная формулировка: *в полном пространстве пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных множеств — всюду плотно.*

[14] У монотонных функций множество точек разрыва не более чем счетно.

◀ Пусть $U_1, U_2, \ldots$ открытые всюду плотные подмножества X, а U_0 — произвольное открытое множество. Любая последовательность вложенных шаров с радиусами $r_n \to 0$

$$\overline{B}_1 \subset U_1 \cap U_0, \quad \overline{B}_2 \subset U_2 \cap \overline{B}_1, \quad \overline{B}_3 \subset U_3 \cap \overline{B}_2, \quad \ldots$$

имеет непустое пересечение[15] (теорема 2.3.3), что влечет за собой непустоту пересечения семейства $U_1, U_2, \ldots$. ▶

Теорема 2.5.1 выглядит несколько схоластичной, но на практике она оказывается удобным инструментом.

2.6. Банаховы и гильбертовы пространства

Линейное нормированное пространство, *если оно полно*, называется — *банаховым.*

В разделе 1.4 примеры метрических пространств: $\mathbb{R}^n$, пространство m ограниченных последовательностей (с нормой $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$), пространство l_2 последовательностей, суммируемых с квадратом и нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$, — *все являются банаховыми.*

«Банаховость» охватывает значительную часть прикладных потребностей. Вот еще несколько примеров.

- *Пространство* $C[0, 1]$ непрерывных функций на $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|,$$

которая в C определяет равномерную сходимость, почему, собственно, C является полным пространством. При норме

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \qquad p \geqslant 1, \tag{2.5}$$

множество непрерывных функций на $[0, 1]$ *не полно*, поскольку сходимость в среднем не обеспечивает непрерывности предельной функции.

Наряду с $C[0, 1]$ рассматриваются *пространства* $C[\overline{\Omega}]$ непрерывных функций, заданных на замыкании ограниченной области Ω. Из контекста обычно ясно, о какой области идет речь, поэтому чаще всего говорят и пишут — просто C, экономя на обозначениях.

[15] Существование подходящего шара $\overline{B}_n$ на каждом шаге очевидна.

• *Пространства* L_p $(p \geqslant 1)$ измеримых с p-й степенью функций и нормой (2.5), где подразумевается *интегрирование по Лебегу*. В главе 3 даны уточнения насчет полноты.

Вместо $[0, 1]$ могут рассматриваться другие области, в том числе — бесконечные.

В некоторых случаях возникает потребность в рассмотрении *пространств* $L_{p\nu}$ с нормой

$$\|x\| = \left(\int_0^1 \nu(t)|x(t)|^p \, dt \right)^{1/p},$$

характеризуемой плотностью усреднения $\nu(t)$.

• *Пространство* $L_\infty[0, 1]$ ограниченных измеримых функций (глава 3) с нормой:

$$\|x\| = \operatorname{ess\,sup} |x(t)|.$$

• *Пространство* C^k непрерывно дифференцируемых (до k-го порядка включительно) функций $x(t)$ с нормой[16)]

$$\|x\| = \max_{j \leqslant k} \max_t |x^{(j)}(t)|.$$

Полнота опять-таки очевидна из классического анализа.

• *Пространства Соболева* W_p^l получаются в результате пополнения в норме

$$\|u\| = \left\{ \int_{\overline{\Omega}} |u(x)|^p \, dx + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} \int_{\overline{\Omega}} |u^{(\alpha)}|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

множества l раз непрерывно дифференцируемых на достаточно «хорошей» области $\overline{\Omega}$ функций $u(x_1, \dots, x_n)$.

В случае $p = 2$ пространство W_2^l гильбертово, и его принято обозначать H^l.

• В тех случаях, когда то или иное пространство определяется как пополнение некоторого множества, — определения могут сильно разниться, поскольку пополнения различных множеств могут давать один и тот же результат. Например, L_p есть пополнение по норме (2.5) множества непрерывных функций, множества полиномов, и вообще любого плотного в L_p множества.

Эквивалентность норм. Нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ считаются эквивалентными (с точки зрения сходимости), если можно указать такие константы α

---

16) Или эквивалентной нормой $\|x\| = \sum_{j \leqslant k} \max_t |x^{(j)}(t)|$.

и β, что

$$\|x\|_1 \leqslant \alpha\|x\|_2, \qquad \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1.$$

В $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны. (!) ◄ Функция $\varphi(x) = \|x\|_1$ на компакте $\|x\|_2 = 1$ достигает своего минимального ($\gamma > 0$) и максимального ($\delta > 0$) значения. Поэтому

$$\gamma\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \delta\|x\|_2$$

при любом $x \in \mathbb{R}^n$. ►

Банахово (т. е. полное нормированное) пространство, в котором норма введена с помощью скалярного произведения, называется *гильбертовым*[17], каковым является, в частности, $\mathbb{R}^n$.

Другой пример гильбертова пространства — $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением[18]

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Часть свойств гильбертова пространства определяются свойствами скалярного произведения. Многое без изменений переносится из линейной алгебры, по крайней мере то, что устанавливалось манипуляциями со скалярным произведением без опоры на конечномерность.

Например, раскрытие скобок в $\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geqslant 0$ дает

$$\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle \geqslant 0,$$

что при $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ переходит в *неравенство Коши—Шварца*[19]

$$\langle x, y\rangle \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$

справедливое независимо от природы элементов и формы скалярного произведения.

Гильбертова норма $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ характеризуется *равенством параллелограмма*[20]

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2.6}$$

---

[17] Чтобы подчеркнуть гильбертовость пространства в его обозначении часто используется буква H (заглавная от Hilbert).

[18] Пример упоминается пока авансом. Измеримость функций и интегрируемость по Лебегу рассматриваются позже.

[19] В предположении $y \neq 0$. Случай $y = 0$ тривиален.

[20] Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей.

В случае (2.6) скалярное произведение восстанавливается по норме:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

Элементы $x, y \in H$ *ортогональны* при условии $\langle x, y\rangle = 0$ — пишут $x \perp y$. Элемент x *ортогонален подпространству* $H_0 \subset H$, если x ортогонален любому элементу в H_0.

2.7. Фактор-пространство

Для заданного линейного многообразия

$$X_0 \subset X$$

линейное пространство X разбивается на *классы смежности* (множества) L. Считается, что два элемента принадлежат одному и тому же классу L, если и только если $x_1 - x_2 \in X_0$.

Два класса смежности либо совпадают, либо не пересекаются. Совокупность всех классов смежности образует *фактор-пространство* X/X_0, наделяемое структурой линейного пространства следующим образом. Если классы L_1 и L_2 имеют представителями x_1 и x_2, то суммой $L_1 + L_2$ объявляется класс, которому принадлежит элемент $x_1 + x_2$. Аналогично, произведение λL определяется как класс, представителем которого служит элемент λx, где $x \in L$. Корректность введенных операций сложения классов смежности и умножения их на число — легко проверяется.

Размерность фактор-пространства X/X_0 (конечная или бесконечная) называется *коразмерностью*, или *дефектом*, подпространства X_0 в пространстве X.

Описанный механизм широко используется при изучении измеримых функций (глава 3), которые естественно[21] отождествлять при несовпадении на множествах нулевой меры. Тогда в качестве X_0 берется множество функций, равных нулю почти всюду, — и в X/X_0 «норма не обращается в нуль на ненулевых элементах».

Другая область применения — изучение линейных операторов в *банаховом пространстве* E. Там возникают два подпространства, *ядро* $\ker A$, или *нуль-пространство*, оператора A: множество x, для которых $Ax = 0$; и *образ* $\mathbf{R}_A$:

[21] Вернее, необходимо — чтобы нормировать пространство.

множество элементов $y = Ax$. Фактор-пространство, например, $\operatorname{coker} A = E/\mathbf{R}_A$ называют *коядром* оператора A.

Конечно, все эти «керы» и «кокеры» не способствуют популярности математики, но здесь надо понимать, что это не более чем торжественная терминология для простых, хотя и непривычных понятий. Да и нужны они по большому счету лишь на той стадии, когда тяга к функциональному анализу становится хронической.

2.8. Аномальные эффекты

Всякое провозглашение закона перекрашивает многоцветную палитру в черно-белые тона. Кое-что из сомнительного и недозволенного ранее становится допустимым. Точно так же декларация определений вынуждает изучать явления, которые на «дотеоретическом» этапе не представляли интереса.

Оказывается, что метрикой могут быть довольно странные функции. Скажем, $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$. Тут, понятно, и обсуждать особенно нечего, но общие теоремы вида «Пусть (X, ρ) некоторое метрическое пространство...», — заминированы такого сорта возможностями.

• «Странные» явления порождают переходы от $\rho(x, y)$ к метрикам типа $\tilde{\rho}(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$.

В *ограниченной метрике*

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \tag{2.7}$$

множества $K_n = [n, \infty)$ *замкнуты, ограничены и вложены друг в друга, но их пересечение — пусто.*

◄ Первые две аксиомы метрики для (2.7) очевидны. Третья — устанавливается достаточно просто. Функция $\dfrac{t}{1+t}$ $(t \geqslant 0)$ монотонно возрастает, поэтому

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Подстановка $a = x - y$, $b = y - z$ дает неравенство треугольника. ►

• Корень зла, однако, заключен не в противоестественности метрики (2.7). Пусть E бесконечномерное банахово пространство. Из леммы 4.3.6 вытекает существование на единичной сфере $S \subset E$ последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию $\|x_n - x_m\| = 1$ при $n \neq m$. Множества $K_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ опять замкнуты, ограничены и вложены друг в друга, но их пересечение — пусто.

Другой пример: множества $K_n \in C[0, 1]$, состоящие из функций $x(t)$ таких, что $|x(t)| \leqslant 2$, $x(0) = 0$ и $x(t) = 1$ при $1/n < t < 1$. Множества K_n теперь еще и выпуклы, но пересечение опять пусто.

• Однако пересечение вложенных *шаров* в банаховом пространстве обязательно не пусто[22]. Дело в том, что в любом банаховом пространстве радиусы вложенных шаров *монотонно убывают* (?) (чего нельзя гарантировать в общем случае метрического пространства). Но тогда либо $r_n \to 0$, и вопрос решается теоремой 2.3.3, либо $r_n \to r > 0$, и тогда центры вложенных шаров «вынуждены» сходиться, в результате чего пересечение опять непусто.

• Возможность *строгого включения шара в шар строго меньшего радиуса* иногда доводит до белого каления, пока не сообразишь[23]. Причина на самом деле тривиальна, и никакие функциональные пространства не нужны, достаточно отрезка $[-1, 1]$ с обычной метрикой. Шар $|x - 1| \leqslant 2 - \varepsilon$ радиуса $2 - \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ находится строго в единичном шаре $|x| \leqslant 1$.

---

[22] Факт, который из-за теоремы 2.3.3 иногда считается ошибочным.

[23] Что приходится делать самостоятельно, поскольку учебники стесняются говорить о слишком простых вещах.

Глава 3

Теория меры

3.1. Мера Лебега

На определенном этапе развития математики многочисленные задачи стали упираться в несостоятельность понятий интеграла и объема. Парадоксы измерения экзотических множеств (см. [2]), сходимость рядов Фурье к неинтегрируемым по Риману функциям (иногда всюду разрывным), — все это создавало ощущение блуждания впотьмах.

Несмотря на усилия многих исследователей поиск не давал результатов. Все время было «горячо», но решение ускользало. Положение спас Лебег. Как это часто бывает, решая частную задачу измерения площадей на искривленных поверхностях, он в итоге построил общую теорию меры, решив проблему в известном смысле окончательно. Все конструктивно задаваемые множества стали измеримыми [1].

Достаточно ясное и простое изложение теории меры имеется в [11] (см. также [16, 24]). Сами технические подробности при изучении предмета играют второстепенную роль. Главный интерес представляет идеологическая сторона дела, на чем, собственно, и сконцентрирован дальнейший текст.

Вот итоговый каркас основной конструкции на примере «плоских» множеств. За исходный пункт берется определение площади прямоугольника [2] $m(P) = ab$, где a и b — стороны P. Площадь фигуры S (пусть пока на $[0,1] \times [0,1]$), представимой в виде ***конечной*** совокупности ***непересекающихся*** прямоугольников $\{P_n\}$, полагается равной

$$m(S) = \sum_n m(P_n), \tag{3.1}$$

---

[1] Для подтверждения факта существования неизмеримых множеств требуется уже аксиома выбора (если говорить с небольшой натяжкой).

[2] Независимо от того, входит ли в прямоугольник граница, целиком или частями. Возможность отсутствия ребер важна для согласования с другими определениями. Например, когда идет речь о граничащих, но непересекающихся прямоугольниках.

что называют *аддитивностью* меры $m(S)$. Из аддитивности в данном случае вытекает *счетная аддитивность*, или *σ-аддитивность*, — т. е. справедливость (3.1) в случае бесконечного числа слагаемых (разумеется, это теорема).

Далее для ограниченных множеств определяется *внешняя мера*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(P_n), \tag{3.2}$$

где инфинум берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или ***счетными*** системами прямоугольников.

Наконец, множество A называется *измеримым по Лебегу*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такую конечную совокупность A_ε непересекающихся прямоугольников, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Меру Лебега $\mu(A)$ измеримого множества A полагают равной[3] $\mu^*(A)$.

> ***В общем случае работает аналогичная схема, с той лишь разницей, что вместо прямоугольников берется та или иная система простейших множеств, мера которых задается директивно, после чего проделываются похожие манипуляции. В отличие от рассмотренной ситуации σ-аддитивность может «не вытекать», и тогда ее приходится постулировать.***

Вот, собственно, и вся теория, если смотреть издалека. При ближайшем рассмотрении появляются дополнительные детали, и картина несколько меняется. Совокупность непересекающихся прямоугольников $\mathcal{P}$ представляет собой *полукольцо множеств*, на котором задана мера $m(P)$, $P \in \mathcal{P}$. В общем случае это и есть отправная точка: полукольцо $\mathcal{P}$ (не обязательно прямоугольников) с заданной на нем аддитивной мерой, σ-аддитивность которой либо постулируется, либо устанавливается[4]. Затем мера m с полукольца $\mathcal{P}$ продолжается на *минимальное кольцо*[5] $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ по правилу (3.1). Корректность *продолжения меры* легко проверяется.

Определение «полукольца» в данном контексте, вообще говоря, не требуется, но его упоминание облегчает чтение другой литературы. Формальная сторона

[3] Упомянутая в определении внешней меры ограниченность множеств приводит к $\mu(A) < \infty$, но простым техническим приемом (разбиения множества на клетки) это ограничение обходится, охватывая множества бесконечной меры типа всей плоскости.

[4] При этом в конечномерных пространствах ключевую роль играет возможность выбора конечных подпокрытий ограниченных множеств.

[5] Содержащее рассматриваемое полукольцо.

дела такова. *Полукольцом множеств* называется семейство $\Phi \subset 2^X$, замкнутое относительно пересечения и обладающее свойством: если $A, B \in \Phi$, то в Φ существуют непересекающиеся $P_1, \dots, P_n$ такие, что

$$A \backslash B = P_1 \cup \ldots \cup P_n.$$

Если речь идет о множествах определенного типа (скажем, прямоугольниках), то проверяется, что объединение, пересечение, разность и симметрическая разность множеств, имеющих разложение $S = P_1 \cup \ldots \cup P_n$, — имеют разложение того же типа, а мера, вычисляемая по формуле (3.1), не зависит от способа разложения S. Это, собственно, и является обоснованием «продолжения меры на кольцо» по правилу (3.1).

Следующий этап: определение внешней меры (3.2), измеримых множеств и, собственно, меры Лебега, — с техническими проблемами не связан[6]. В теоремном обеспечении нуждается заключительный этап, состоящий в выяснении того, что же в итоге получилось. Насколько велик запас измеримых множеств и каковы свойства меры μ?

3.1.1. Теорема Лебега. *Совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций счетного объединения и счетного пересечения, а мера μ σ-аддитивна*[7].

Доказательство сводится к некоторому количеству достаточно простых шагов [11]. Разумеется, впечатление легкости возникает задним числом.

Поскольку любое открытое множество на $[0, 1] \times [0, 1]$ представимо в виде счетного объединения замкнутых прямоугольников (?), то на $[0, 1] \times [0, 1]$ измеримы любые открытые и замкнутые множества, а также их счетные объединения и пересечения (и не только они).

Аксиоматика теории меры охватывает весьма широкий класс ситуаций. Вот стандартная модель из теории вероятностей иной содержательной природы. На счетном множестве

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$$

---

[6] Надо лишь оговорить в общем определении измеримого множества, что A_ε — это элемент минимального кольца, а не совокупность непересекающихся прямоугольников, как в плоском случае.

[7] Т. е. $\mu(\Omega) = \sum\limits_n^{\infty} \mu(\Omega_n)$, если множества Ω_n попарно не пересекаются и $\Omega = \bigcup\limits_n \Omega_n$.

задана «мера точек» $p_n = m(\omega_n)$, удовлетворяющая условию нормировки $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Измеримы оказываются любые подмножества $A \subset \Omega$, а мера

$$\mu(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n$$

получается σ-аддитивной.

Конечные и бесконечные меры. Когда речь идет об измерении подмножеств квадрата $X = [0,1] \times [0,1]$, мера $\mu(X)$ конечна, а X принадлежит минимальному кольцу $\mathcal{R}(\mathcal{P})$. В общем случае при условии $X \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ кольцо называют *кольцом с единицей*. Звучит, безусловно, наукообразно, но так принято, и есть аргументы «за» у тех, кто освоил терминологию, и «против» — у тех, кто не освоил.

Если X — вся плоскость, то она может быть поделена на квадратные клетки, разрезающие любую фигуру на части, мера которых определяется по отдельности, а потом все суммируется. Понятно, что мера фигуры может получиться бесконечной, не говоря об очевидном $\mu(X) = \infty$.

Условие $X \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$ не выполняется во многих других случаях, например, когда X — открытый круг. Почти любые практические ситуации охватываются условием принадлежности X сигма-кольцу $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{P})$, в котором допускаются счетные объединения элементов из $\mathcal{R}(\mathcal{P})$. Меру в этом случае называют *σ-конечной*, но она может принимать, в том числе, бесконечные значения. Однако это тема для молчаливого взаимопонимания — КПД слов здесь слишком низок.

Заслуживает упоминания *непрерывность σ-аддитивной меры*, каковой называют следующее свойство:

$$\mu(\Omega) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n)$$

для любой цепочки вложенных множеств конечной меры

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \quad \text{и} \quad \Omega = \bigcap_n \Omega_n.$$

• Для $\Omega_n = \{x : n < x < \infty\}$ пересечение пусто, поэтому

$$\mu\Big(\bigcap_n \Omega_n\Big) = 0,$$

но $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = \infty$.

• Любое подмножество множества меры нуль — измеримо и тоже имеет меру нуль. (?) Это свойство называют *полнотой лебеговской меры*.

3.2. О подоплеке

Когда вдруг решается сложная задача, интересно выяснить «почему», — в надежде на поучительный ответ.

В данном случае, правда, задача не выглядит сложной. Простые определения, утверждения стандартного типа, легкие доказательства. Но о «сложности» можно судить косвенно — по числу неудач и рейтингу участников (Борель, Жордан).

Беда была в том, что решение напрашивалось, но не приводило к желаемому результату. Если не пытаться разыгрывать детектив, надо сразу сказать, что ***вся сложность здесь приходится на определения***, т. е. на первичные понятия. Новичку поверить в это, конечно, трудно, но тут как раз никакой хитрости. Именно так развивается почти любой математический сюжет — нетривиальность создания понятий характерна для любой области. Речь, ясное дело, идет об удачных понятиях. При неудачных — кое-что доказывается, но не то, чего хочется. И надо так «пошевелить» определения (никто не знает как), чтобы область «ожила».

В данном случае удачное «шевеление» явно ощутимо. Схема Лебега идейно очень похожа на *схему Жордана*, опиравшуюся на «древнегреческую» аппроксимацию измеряемого множества S изнутри и снаружи: $P \subset S \subset Q$, где P и Q — семейства непересекающихся прямоугольников, P укладывается в S, а Q — накрывает S. При совпадении супремума $m(P)$ и инфинума $m(Q)$ множество S объявлялось измеримым.

Очень близко, казалось бы, — но измеряется меньше, чем у Лебега. У Лебега чуть по-другому, однако определения начинают работать, в результате измеряется не кое-что, а «все».

У причины много лиц. Разумеется, талант, безусловно, удача. Но есть и математический ракурс.

Если на совокупности $\mathcal{P}$ непересекающихся прямоугольников определить функцию

$$\rho(P, Q) = m(P \Delta Q), \tag{3.3}$$

то это *полуметрика*[8], становящаяся метрикой после отождествления тех P и Q, для которых $m(P\Delta Q) = 0$. В результате $\mathcal{P}$, вернее,

---

[8] «Полуметрика» из-за возможности $m(P\Delta Q) = 0$ при неравных P и Q — различные системы прямоугольников могут покрывать одну и ту же фигуру.

множество его эквивалентных классов[9], по метрике (3.3) становится метрическим пространством. Дальнейшее сводится к ***пополнению*** этого пространства, что и приводит к «полному пространству измеримых множеств».

> ***При описанной точке зрения талант для получения результата уже не требуется. Задача помещается в колею выполнения рутинных операций.***
>
> ***В этом и состоит прикладная значимость функционального анализа. Дается координатная сетка мышления, превращающая хаотичное блуждание в целенаправленную деятельность.***

На пополнение $\mathcal{P}$ измеримыми функциями полезно взглянуть еще с другой точки зрения. Пополнение рациональных чисел иррациональными — не для всех убедительно. Из-за привычности не в полной мере чувствуется необходимость и фундаментальная роль. «Измеримости» в большей степени присущ аромат новизны, и восприятию идеи не мешает будничность.

О внутренней мере Лебега. Известны различные схемы введения меры Лебега, в том числе — основанные на идее зажимания искомой величины с двух сторон, но не так, как у Жордана. *Внутренняя мера Лебега* μ_* определяется как внешняя мера дополнения: $\mu_*(A) = \mu^*(X \backslash A)$. Измеримость A обеспечивает $\mu_* = \mu^*$.

О борелевской измеримости. *Борелевские множества* как элементы минимальной σ-алгебры, содержащей любые сегменты $[a, b] \subset \mathbb{R}$, часто упоминаются скороговоркой. В результате иногда создается впечатление, что на прямой — это и есть измеримые по Лебегу множества. *Это неправильно.* Всякое борелевское множество измеримо по Лебегу, но не всякое измеримое по Лебегу — борелевское.

Точное положение дел: *всякое измеримое по Лебегу множество — есть борелевское плюс множество меры нуль.*

3.3. Измеримые функции

Функцию $f : X \to Y$ называют *измеримой*, если в X измерим прообраз $f^{-1}(A)$ любого измеримого в Y множества A.

В случае $f : X \to \mathbb{R}$ работает то же определение, но на прямой избирается система борелевских множеств (!), а не система

[9] Т. е. фактор-множество по отношению эквивалентности $m(P \Delta Q) = 0$.

множеств, измеримых по Лебегу. При этом «для очистки совести» функцию f называют *борелевской*, либо *измеримой по Борелю*, либо B*-функцией*, а $f : X \to Y$, для контраста, называют μ*-измеримой*. Однако обременительная атрибутика постепенно сходит на нет, и вещественные функции начинают называть просто измеримыми, что вносит определенную путаницу.

Непрерывные функции являются, безусловно, B-функциями, но не обязаны быть измеримыми в смысле Лебега (раздел 3.11). Поэтому при их именовании просто измеримыми — появляются «странности». *Непрерывная функция от измеримой — всегда измерима, а измеримая от непрерывной — необязательно.* В то же время где-нибудь рядом располагается теорема, утверждающая измеримость композиции измеримых функций. Аудитория в результате постепенно рассасывается.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *измерима* (на самом деле B*-измерима*), если при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ измеримы *лебеговские множества*

$$X_\alpha(f) = \{x : f(x) < \alpha\}.$$

Это обычно принимают за определение измеримости вещественных функций.

Естественно, возникает вопрос, почему бы не выбросить борелевскую конструкцию за борт, заменив лебеговской и ликвидировав двойственность толкования. Потому что лебеговскую измеримость легко декларировать, но трудно проверять. Достаточно вспомнить о непрерывных функциях.

В то же время борелевских множеств и функций вполне хватает для многих приложений. При этом борелевские функции переводят измеримые *по Лебегу* множества в измеримые — *по Лебегу*[10], что, собственно, и требуется для интегрирования по Лебегу (см. далее).

Функции, значения которых отличаются на множестве нулевой меры, считаются *эквивалентными*. В пространствах измеримых функций в качестве элементов обычно подразумеваются *классы эквивалентных функций*. Конкретную функцию называют *представителем* своего класса.

Когда говорят о поточечной сходимости измеримых функций, имеется в виду *сходимость почти всюду*, $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, т. е. $f_n(x) \to f(x)$ может нарушаться на множестве нулевой меры.

• Измеримые функции могут сильно отличаться от непрерывных, будучи разрывными в любой точке. С другой стороны, функция $f(x)$, измеримая на $[a, b]$,

[10] Поскольку борелевские множества измеримы.

отличается от непрерывной не очень сильно в следующем смысле (*теорема Лузина*): по любому ε можно указать непрерывную функцию $\varphi(x)$ такую, что $f(x) \neq \varphi(x)$ лишь на множестве меры $< \varepsilon$.

• Определенный «философский» интерес представляет *функция Римана* $f(x)$, равная нулю в иррациональных точках, и $f(x) = 1/q$, где $x = p/q$ — представление x в виде несократимой дроби. Очевидно, $f(x)$ непрерывна в иррациональных точках и разрывна — в рациональных.

• Измеримые функции естественным образом возникают при рассмотрении рядов Фурье, поскольку сумма $\sum^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ не обязана быть непрерывной при непрерывных $\varphi_n(x)$ и может сходиться к весьма экзотическим функциям.

Вот несложные, но принципиальные факты:

• *Композиция (функция от функции) измеримых функций — измеримая функция*[11]*. Борелевская функция от μ-измеримой — μ-измерима.*

• *Сумма, разность, максимум, произведение и частное (если знаменатель не обращается в нуль) измеримых функций — измеримы*[12].

• *Предел поточечно сходящейся последовательности измеримых функций $f_n(x) \to f(x)$ — измерим.*

Выделенное рамкой утверждение с практической точки зрения наиболее важно. Например, сходимость $\sum^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, как числового ряда при любом фиксированном x, обычно легко устанавливается, но возникает проблема с непрерывной зависимостью от x. Могли бы возникать проблемы и с измеримостью $\sum^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, но их нет, — поэтому в пространствах измеримых функций поточечно сходящиеся функциональные ряды можно суммировать без предосторожностей.

◀ Измеримость предела $f_n(x) \to f(x)$ в случае монотонно убывающей последовательности $f_n(x)$ очевидна, поскольку множество $X_\alpha(f)$ измеримо как

[11] Описания компьютерных программ сейчас никто не читает (иначе время уходит в песок), а сами программы делаются так, чтобы легко было догадаться. Похоже, этот рецепт будет находить все большее применение во всех сферах жизни, в том числе — в математических текстах.

[12] Элементарно проверяется измеримость лебеговских множеств.

объединение множеств $X_\alpha(f_n)$. В общем случае $f_n(x) \to f(x)$ можно заменить двумя монотонными пределами сначала по k, потом по n от

$$f_{nk}(x) = \max\left\{f_{n+1}(x), \dots, f_{n+k}(x)\right\}. \quad ►$$

3.3.1. Теорема Егорова. *Пусть $\mu(X) < \infty$ и $f_n \xrightarrow{п.в.} f$, где речь идет об измеримых функциях, действующих из X в $\mathbb{R}$. Тогда существует подмножество X_ε сколь угодно малой меры $\mu(X_\varepsilon) < \varepsilon$ такое, что $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $X \backslash X_\varepsilon$.*

◄ Положим

$$X_n^k = \bigcup_{j=n}^{\infty}\left\{x : |f_j(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

Очевидно, $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^k\right) \to 0$ при $n \to \infty$ и любом фиксированном k. Поэтому по любым $\varepsilon > 0$ и k можно указать такое $n(k)$, что $\mu\left(X_{n(k)}^k\right) < \varepsilon/2^k$. Требованиям теоремы удовлетворяет множество

$$X_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_{n(k)}^k. \quad ►$$

Измеримую функцию f называют *существенно ограниченной сверху*, если $f(x) \leqslant \alpha < \infty$ почти всюду. Наименьшее α называется *существенной верхней гранью* $f(x)$ и обозначается

$$\boxed{\operatorname{ess\,sup} f(x).}$$

Существенная нижняя грань, $\operatorname{ess\,inf} f(x)$, определяется аналогично. Когда речь идет просто о *существенной ограниченности*, имеется в виду $|f(x)| \leqslant \alpha < \infty$.

3.4. Интеграл Лебега

Определенный интеграл подразумевает вычисление объема под графиком $f(x)$. В любом случае это приходится делать на базе того или иного предельного перехода, отталкиваясь от «уже известных» объемов. «По Риману» область интегрирования разбивается на малые кубики. Дальнейшее развитие сюжета хорошо известно. Искомый предел зажимается между нижней и верхней суммами Дарбу, после чего ребра кубиков устремляются к нулю. В результате по Риману интегрируются кусочно-непрерывные функции[13], но для многих задач этого мало[14].

Интеграл Лебега строится совсем по другой схеме. Разбиение области интегрирования на малые объемы осуществляется по признаку близости значений интегрируемой функции. Обыгрывается это, например, так. Сначала рассматриваются *измеримые простые функции* $f : X \to \mathbb{R}$, принимающие не более чем счетное число значений $y_1, \dots, y_n, \dots$, и для них интеграл по $A \subset X$ определяется как

$$\int_A f(x)\, d\mu(x) = \sum_n y_n \mu(A_n), \tag{3.4}$$

где $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$, причем множества A_n измеримы в силу измеримости $f(x)$ (как прообразы точек), а ряд (3.4) предполагается *абсолютно сходящимся*.

При абсолютной суммируемости ряда (3.4) для любого $A \subset X$ простую функцию f называют *суммируемой* на X. Требование абсолютной суммируемости ряда (3.4) является принципиальным — именно оно оказывается ответственным за то, что некоторые функции интегрируются по Риману, но не интегрируются по Лебегу (см. далее).

Затем функцию $f(x)$ определяют как *интегрируемую по Лебегу* на X, если существует сходящаяся почти всюду[15] к $f(x)$ последовательность суммируемых на X простых функций $f_n(x)$. Предел $\int_X f(x)\, d\mu$ числовой последовательности $\int_X f_n(x)\, d\mu$ в этом случае объявляется *интегралом Лебега*. Используется также обычное обозначение $\int_X f_n(x)\, d\mu$, когда мера строится с помощью непересекающихся прямоугольников, что на самом деле везде подразумевается, $d\mu = dx$, если не оговорено противное.

[13] Если говорить точно, то для интегрируемости по Риману на $[a, b]$ ограниченной функции — необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело меру нуль. Интегрируемая по Лебегу функция может быть разрывна всюду.

[14] Не говоря о том, что иногда возникает потребность интегрирования на множествах, где топология не задана, и непрерывность не имеет смысла.

[15] В некоторых учебниках определение интегрируемости по Лебегу опирается на последовательности $f_n(x)$ «сходящиеся равномерно». Разница возникает из-за выбора, по каким ступенькам ступать, двигаясь к конечному результату.

В части обоснования (проверки корректности определения) опять «выстреливает» *операция пополнения*. По крайней мере на задачу можно так смотреть, и та́к смотреть выгоднее всего, потому что тогда рассуждение перестает быть фокусом.

На множестве *простых* функций вводится полуметрика [16]

$$\rho(f, g) = \int_X |f(x) - g(x)|\, d\mu(x), \tag{3.5}$$

которая по непрерывности продолжается на все суммируемые (интегрируемые по Лебегу) функции. Возможность продолжения опирается на следующий факт. *Если две последовательности простых функций* $\{f_n\}$ *и* $\{g_n\}$ *фундаментальны и*

$$|f_n(x) - g_n(x)| \to 0$$

почти всюду, то $\rho(f_n, g_n) \to 0$. (?)

Отсюда $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ влечет за собой существование предела

$$\int_X f_n(x)\, d\mu,$$

т. е. интеграла Лебега.

Если теперь между эквивалентными функциями не делать различия, то на множестве классов эквивалентности (проще, конечно, говорить о функциях, держа оговорку насчет классов в уме) полуметрика (3.5) *становится метрикой, и общая картина выглядит следующим образом. Метрическое пространство простых функций (оговорку держим в уме) надо пополнить — элементы пополненного пространства (с точностью до изометрии это фундаментальные последовательности простых функций — см. раздел* 2.4) *есть интегрируемые по Лебегу функции.*

Остается превратить абстрактную ясность в конкретную. Какие функции интегрируемы по Лебегу? Простые — «да», но это само собой. Предельные функции — «да» по определению, но что из себя они представляют? Ответ прост и достаточно всеобъемлющ.

Интегрируемы по Лебегу любые измеримые на X функции.

◄ Докажем, для простоты, менее общий факт: интегрируемость существенно ограниченных измеримых функций в ситуации $\mu(X) < \infty$. Вместо существенно ограниченной — будем рассматривать эквивалентную ограниченную функцию $f(x)$. Для существования интеграла Лебега достаточно указать сходящуюся почти всюду к $f(x)$ последовательность *простых* функций.

С помощью измеримых множеств

$$s_{kn} = \left\{x : \frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{(k+1)}{n}\right\}$$

[16] Аксиомы легко проверяются.

определим

$$f_n(x) = \sum_k \frac{k}{n}\chi_{kn}(x),$$

где χ_{kn} — функции-индикаторы множеств s_{kn}. Функции $f_n(x)$, очевидно, простые и $f_n(x) \to f(x)$ равномерно, а значит, и почти всюду. ▶

В данной точке становится ясно, что доказательная часть, связанная с интегралом Лебега, может быть сделана весьма экономной. Конечно, если воспроизводить конструкцию теоремы 2.4.2 (*о пополнении пространства*) *для данного частного случая, это займет много страниц.*

Слово «интеграл» гипнотизирует — и свойства интеграла Римана[17] автоматически переносятся в новую обстановку. Тем не менее эти свойства требуют обоснования. Аналогия, как всегда, играет двойственную роль (помогает и обманывает). Речь идет о простых фактах:

$$\int_A d\mu = \mu(A); \qquad \int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,d\mu = \alpha \int_A f(x)\,d\mu + \beta \int_A g(x)\,d\mu;$$

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad\Rightarrow\quad m\mu(A) \leqslant \int_A f(x)\,d\mu \leqslant M\mu(A),$$

$$\left|\int_A f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int_A |f(x)|\,d\mu,$$

которые «один к одному» воспроизводят свойства интеграла Римана.

Но есть и принципиальное отличие. Интегралы Лебега

$$\int_A f(x)\,d\mu \quad \text{и} \quad \int_A |f(x)|\,d\mu$$

или оба существуют, или оба не существуют. Источником этого *неожиданного*[18] свойства является требование абсолютной сходимости ряда (3.4) в определении интеграла простой функции.

[17] Который *в случае существования совпадает с интегралом Лебега*. (?)

[18] «Неожиданного» потому, что интегрируемость по Лебегу может не вытекать из интегрируемости по Риману. Несобственный интеграл Римана

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

существует, а Лебега — нет.

3.5. Пространства L_1 и L_∞

В разделе 3.4 при «пополнении» множества простых функций по метрике (3.5) было построено, по существу, пространство L_1 функций, интегрируемых по Лебегу. Затем было установлено совпадение L_1 с множеством всех, измеримых на X, функций.

Поскольку «пополнение» осуществлялось нестандартно[19], об L_1 имеет смысл сказать еще раз. L_1 — *банахово пространство измеримых на* X *функций*[20] с нормой

$$\|f\| = \int_X |f(x)|\, d\mu(x). \tag{3.6}$$

Метрика (3.5) — обычная метрика нормированного пространства, $\rho(f,g) = \|f-g\|$.

При желании расставить точки над «i» — пишут $L_1(X,\mu)$ либо $L_{1\mu}$. Просто под L_1 чаще подразумевают ситуацию $d\mu(x) = dx$.

Аксиомы нормы для (3.6) проверяются в уме. Полнота L_1 устанавливается в разделе 3.6.

Из предыдущего в принципе ясно, что множество простых функций всюду плотно в L_1. Избыточное требование $f_n(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ было нужно не для пополнения, а для сходимости интегралов (и то, оно необязательно, как потом выясняется — раздел 3.7).

Более того, всюду плотно в L_1 множество функций, принимающих конечное число значений, ибо пределы[21] таких функций порождают все простые функции.

В L_1 *всюду плотно также множество непрерывных функций*, поскольку функции, принимающие конечное число значений, можно представить как пределы непрерывных функций.

В диапазоне пространств L_p ($p \geqslant 1$) особое положение занимает банахово *пространство* L_∞ *функций измеримых и существенно ограниченных на* X с нормой

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f(x)|$$

[19] Предполагалась фундаментальность $\{f_n\}$ по метрике (3.5) плюс $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, — но последнее условие как бы лишнее.

[20] Либо «оговорку» надо держать в уме, либо уточнить, что L_1 — это фактор-пространство, в котором измеримые функции, отличающиеся на множестве нулевой меры, отождествляются.

[21] Разумеется, по норме L_1.

и метрикой
$$\rho_\infty(f,g) = \operatorname{ess\,sup} |f(x) - g(x)|.$$

В случае $\mu(X) < \infty$, очевидно, $L_\infty \subset L_1$.

3.6. Ассортимент сходимостей

В теории интеграла Лебега все время происходит жонглирование двумя типами сходимости: почти всюду, $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, и по норме L_1, в записи $f_n \xrightarrow{L_1} f$. Сходимость $f_n \xrightarrow{L_1} f$ называют также *сходимостью в среднем*.

Определенную роль играет еще одно понятие. Последовательность $f_n(x)$ называют *сходящейся по мере* к функции $f(x)$, записывают как $f_n \xrightarrow{\mu} f$, если при любом $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Сходимость по мере и почти всюду в теории вероятностей называют сходимостью, соответственно, *по вероятности* и *с вероятностью единица*. Несмотря на сходство при беглом взгляде это разные понятия[22]. *Из сходимости почти всюду вытекает сходимость по мере, но не наоборот.* Однако *из сходимости $f_n \to f$ по мере вытекает существование подпоследовательности* $f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ (см. далее).

Как $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, так и $f_n \xrightarrow{L_1} f$, — влекут за собой сходимость по мере.

◄ В первом случае импликация очевидна. Во втором — следует из неравенства[23]
$$\mu(\Omega_\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x), \tag{3.7}$$
где $\Omega_\varepsilon = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}$, которое вытекает из очевидной цепочки
$$\int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) \geqslant \int\limits_{\Omega_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) \geqslant \varepsilon \int\limits_{\Omega_\varepsilon} d\mu(x) = \varepsilon\mu(\Omega_\varepsilon). \quad ►$$

• Другие импликации — не верны. Последовательность $n\chi_{[0,1/n]}(x)$, где $\chi_{[0,1/n]}$ — функция-индикатор сегмента $[0, 1/n]$,

[22] Примеры, демонстрирующие различие понятий, см. в: *Босс В.* Лекции по математике: Вероятность, информация, статистика. Т. 4. М.: УРСС, 2005.

[23] Аналог *неравенства Чебышева*.

сходится к нулю на $[0, 1]$ как по мере, так и почти всюду, но не сходится в среднем.

Лежащая на поверхности причина — неограниченность функций последовательности. Но такой диагноз не совсем точен. Наличие интегрируемой мажоранты ликвидирует источник возможных неприятностей (теорема 3.7.2).

• Пример, показывающий, что сходимость почти всюду не вытекает из двух других, описать сложнее, но идея прозрачна. Достаточно взять последовательность функций-индикаторов $\chi_{\Omega(n)}(x)$ множеств $\Omega(n)$, мера которых стремится к нулю, а сами $\Omega(n)$ беспорядочно мечутся по $[0, 1]$. Конкретно это можно сделать так. Любое n однозначно представимо в виде $n = 2^p + q$, если договориться, что p выбирается максимально возможным[24]. В качестве $\Omega(n)$ достаточно взять сегмент $\left[\frac{q}{2^p}, \frac{q+1}{2^p}\right]$.

Последовательность $\chi_{\Omega(n)}(x)$ сходится к нулю как по мере, так и в среднем, но не сходится почти всюду (не сходится ни при одном $x \in [0, 1]$).

3.6.1. Теорема. *Если f_n сходится к f по мере или $f_n \xrightarrow{L_1} f$, то из $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.*

◄ Поскольку из $f_n \xrightarrow{L_1} f$ следует сходимость по мере, достаточно рассмотреть случай $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Пусть числовые последовательности $\{\varepsilon_n > 0\}$, $\{\delta_n > 0\}$ таковы, что $\varepsilon_n \to 0$, а ряд $\delta_1 + \delta_2 + \ldots$ сходится. Подпоследовательность индексов $\{n_k\}$ строится следующим образом: n_k выбирается одно за другим так, чтобы $n_{k+1} > n_k$ и $\mu(\Omega_{\varepsilon_k}) < \delta_k$.

Положим теперь

$$\Theta_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} \Omega_{\varepsilon_k}, \qquad \Theta = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Theta_j.$$

В силу *непрерывности меры* $\mu(\Theta_j) \to \mu(\Theta)$. А поскольку

$$\mu(\Theta_j) < \sum_{k=j}^{\infty} \delta_k,$$

то $\mu(\Theta_j) \to 0$, что и означает $f_{n_k} \to f$ почти всюду. ►

[24] Разумеется, при условии $p, q \geqslant 0$.

3.7. Предельный переход под интегралом

Довольно часто возникает необходимость[25] перехода к пределу под знаком интеграла. Для равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,d\mu(x)=\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x)$$

необходимы дополнительные предположения. В классическом анализе — это равномерная сходимость $f_n(x)\to f(x)$.

Разумеется, если $f_n \xrightarrow{L_1} f$, то

$$\int_\Omega f_n(x)\,d\mu(x)\to\int_\Omega f(x)\,d\mu(x), \tag{3.8}$$

но это тавтология.

Реальные потребности связаны в основном со сходимостью почти всюду. Проблематику в значительной степени покрывают следующие результаты.

3.7.1. Теорема Леви о монотонной сходимости. *Пусть монотонно возрастающая последовательность*[26] $\{f_n\}\subset L_1$ *и интегралы от* f_n *ограничены в совокупности*[27]*. Тогда почти всюду существует поточечный предел* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$*, последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *почти всюду и справедливо* (3.8) *на любом измеримом множестве* Ω.

◀ Последовательность $\displaystyle\int_X f_n(x)\,d\mu(x)$, как монотонная и ограниченная, имеет предел, откуда следует $f_n \xrightarrow{L_1} f$. Это влечет за собой (3.8) — но пока не гарантируется, что f — поточечный предел f_n. Однако по теореме 3.6.1 из $f_n(x)$ можно извлечь подпоследовательность $f_{n_k} \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. Присовокупление монотонности в итоге дает $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. ▶

---

[25] При сдаче экзаменов, например.

[26] $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\ldots$ почти всюду.

[27] Существует такое $\gamma>0$, что $\displaystyle\int_X f_n(x)\,d\mu(x)<\gamma$ при любом n.

3.7.2. Теорема Лебега. *Если*

$$\{f_n\} \subset L_1, \quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x) \in L_1 \quad \text{и} \quad f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f,$$

то $f \in L_1$ *и справедливо* (3.8) *на любом измеримом множестве* Ω.

◄ Доказать, по сути, требуется $f_n \xrightarrow{L_1} f$, что из $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ не следует, но при наличии интегрируемой мажоранты ситуация меняется.

Функции

$$g_n(x) = \inf_{k \geqslant n} f_k(x) \quad \text{и} \quad h_n(x) = \sup_{k \geqslant n} f_k(x)$$

измеримы[28], монотонны (одна убывает, другая возрастает), а их интегралы ограничены в совокупности в силу наличия интегрируемой мажоранты у $|f_n(x)|$. Теорема 3.7.1 гарантирует, по существу, сходимость $g_n \xrightarrow{L_1} g$ и $h_n \xrightarrow{L_1} h$ к своим поточечным пределам, равенство которых, $g(x) = h(x)$, очевидно. Функции $f_n(x)$, зажатые между $g_n(x)$ и $h_n(x)$, сходятся «туда же». ►

3.7.3. Лемма Фату. *Пусть* $\{f_n\} \subset L_1$, *все* $f_n(x) \geqslant 0$, *все интегралы* $\int\limits_X f_n(x)\, d\mu(x) < \gamma$ *и* $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$. *Тогда*

$$f \subset L_1 \quad \text{и} \quad \int\limits_X f(x)\, d\mu(x) < \gamma.$$

◄ Почти без изменения работает предыдущая схема доказательства. ►

Проблематику в миниатюре отражает простой пример. Последовательность $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ на $[0, 1]$ почти всюду сходится к нулю, но площадь под кривой $f_n(x)$ — не сходится. В этом вся загвоздка. Предел под интегралом понимается как «почти всюду», а надо как $f_n \xrightarrow{L_1} f$. Тогда придумываются условия, в которых из первого следует второе.

Полнота L_1 с помощью перечисленных инструментов устанавливается следующим образом.

◄ Пусть $\{f_n\} \subset L_1$ — фундаментальная последовательность. Без ограничения общности можно считать[29] $\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant 1/2^n$.

---

[28] Поскольку их множества Лебега получаются как объединения множеств Лебега измеримых функций.

[29] Иначе можно перейти к подпоследовательности.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|, \quad \text{где} \quad \varphi_1 = f_1 \quad \text{и далее} \quad \varphi_n = f_n - f_{n-1},$$

сходится по лемме 3.7.3 к некоторой функции $\varphi(x) \in L_1$, откуда следует $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, причем все $f_n(x) \leqslant \varphi(x)$. Но тогда по теореме 3.7.2

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{L_1} f. \quad \blacktriangleright$$

3.8. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега

Представление меры

$$\mu(A) = \int_A d\mu$$

наталкивает на мысль рассмотреть интеграл

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x) \tag{3.9}$$

как функцию множества A и задаться вопросом о сходстве и различии $\mu(A)$ и $\nu(A)$. Надуманная с виду проблематика оказывается важной для некоторых приложений и выводит на интересные и даже неожиданные (иногда) задачи.

Функцию $\nu(A)$ называют *знакопеременной мерой*, или *зарядом*. Вообще-то зарядом называют σ-аддитивную функцию, заданную на некоторой σ-алгебре подмножеств X. Но *такая функция* $\nu(A)$ *при условии абсолютной непрерывности* (*см. ниже*) *всегда может быть представлена в виде* (3.9) (теорема *Радона—Никодима*).

Свойство *абсолютной непрерывности интеграла* устанавливает следующая теорема.

3.8.1. Теорема. *Для любой интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что*

$$\left| \int_\Delta f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого $\Delta \subset X$ *при условии* $\mu(\Delta) < \delta$.

Напомним, что скалярная функция $\varphi(x)$, заданная на $[a, b]$, называется *абсолютно непрерывной*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой конечной совокупности непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset (a, b)$

$$\sum_k |a_k - b_k| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_k |\varphi(a_k) - \varphi(b_k)| < \varepsilon.$$

Функция $\varphi(x)$ *абсолютно непрерывна, если и только если она переводит множества меры нуль в множества меры нуль.* (**?**)

На первых ступенях матанализа такое усиление свойства непрерывности иногда даже не упоминается, и начинает играть ощутимую роль в сфере измеримости. Абсолютно непрерывная функция отображает измеримое множество в измеримое, на $[a, b]$ имеет *ограниченную вариацию*[30] и почти всюду — конечную производную $\varphi'(x)$, причем вариация $\varphi(x)$ равна

$$V_a^b(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(x)|\, dx.$$

Теорема. *Функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию в том и только том случае, когда она представима в виде разности двух монотонных функций.*

Непрерывная функция не обязана иметь ограниченную вариацию. Вариация $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ $(f(0) = 0)$ на $[0, 1]$ не ограничена.

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега играет существенную роль в задачах, где в фокус внимания попадает взаимосвязь с дифференцируемостью. Например, по аналогии с интегралом Римана желательна, а иногда и необходима, формула

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a), \tag{3.10}$$

---

[30] Вариация $V_a^b(\varphi)$ есть точная верхняя грань сумм

$$\sum_k |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)|, \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Функция ограниченной вариации имеет не более чем счетное множество точек разрыва.

которая в общем случае неверна. *Канторова лестница* (раздел 1.8) дает пример непрерывной функции $f(x)$ с производной, равной нулю почти всюду, в результате чего

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = 0,$$

однако $f(1) - f(0) = 1$.

Равенство (3.10) обеспечивает предположение абсолютной непрерывности функции $f(x)$.

Соответствующие потребности возникают, например, в системах оптимального управления

$$\dot{x} = f[x, u],$$

где управление $u(t)$ [в силу естественной ограниченности] кусочно-линейно, а лучше измеримо. Но тогда переход к интегральному описанию системы

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f[x(s), u(s)]\,ds$$

принципиально зависит от справедливости соотношения

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(s)\,ds$$

вида (3.10). Формально траекторию $x(t)$ приходится считать абсолютно непрерывной[31].

Неопределенный интеграл Лебега. Из теоремы 3.8.1 вытекает суммируемость и абсолютная непрерывность неопределенного интеграла

$$\int_a^t f(s)\,ds$$

как первообразной функции на $[a, b]$.

[31] Когда формализм начинает мешать, его «не замечают».

3.8.2. Теорема Лебега. *Абсолютно непрерывная функция* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *почти всюду дифференцируема, и*

$$\int_a^t \dot f(s)\,ds = f(t) - f(a), \quad t\in[a,b].$$

Отсюда вытекает, что неопределенный интеграл от суммируемой на $[a,b]$ функции $\varphi(x)$ почти всюду дифференцируем и

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \varphi(s)\,ds = \varphi(t).$$

3.9. Конструкция Стилтьеса

Если сумма

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)[\Phi(t_j)-\Phi(t_{j-1})], \qquad a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b,$$

где f и Φ — некоторые функции[32] на $[a,b]$, — при измельчении разбиения, $\max\limits_j(t_j-t_{j-1})\to 0$, стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *интегралом Римана—Стилтьеса* и обозначается как

$$\int_a^b f(s)\,d\Phi(s). \tag{3.11}$$

Классический результат Стилтьеса: *для существования интеграла* (3.11) *достаточно, чтобы f была непрерывна, а Φ имела на $[a,b]$ ограниченную вариацию.*

Интеграл Лебега—Стилтьеса строится иначе. Сначала на основе задания на $[a,b]$ мер элементарных множеств:

$$m(\alpha,\beta)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha+0), \qquad m[\alpha,\beta]=\Phi(\beta+0)-\Phi(\alpha),$$
$$m(\alpha,\beta]=\Phi(\beta+0)-\Phi(\alpha+0), \quad m[\alpha,\beta)=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha),$$

[32] Обычно Φ — предполагается непрерывной слева.

по стандартной схеме строится мера Лебега, называемая в данном случае *мерой Лебега—Стилтьеса* и обозначаемая как μ_Φ.

Интеграл Лебега—Стилтьеса

$$\int_a^b f(s)\, d\Phi(s)$$

определяется как интеграл Лебега по мере μ_Φ,

$$\int_a^b f(s)\, d\Phi(s) = \int_a^b f(s)\, d\mu_\Phi.$$

Его значение совпадает со значением интеграла Римана—Стилтьеса, если последний существует.

> *Мера Лебега—Стилтьеса — и интеграл — не выводят за рамки лебеговской теории и представляют лишь специфическую технологию построения мер Лебега. Но эта технология имеет самостоятельное значение, поскольку является тем микроскопом, который позволяет рассмотреть определенный круг задач, недоступный для других средств наблюдения.*

Данная тематика лежит в стороне от фарватера изложения. Подробности — в [11], задачи — в [10].

3.10. Произведение мер, теорема Фубини

Пусть в X и Y заданы, соответственно, меры μ и ν. На полукольце прямых произведений множеств

$$A \times B, \quad A \subset X, \quad B \subset Y, \tag{3.12}$$

произведение мер определяется как

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Дальнейший сценарий разворачивается по типу двойных и повторных римановских интегралов. Понятно, что не каждое «плоское» множество $\Omega \subset X \times Y$ представимо в виде (3.12), но с полукольца множеств вида (3.12) по схеме Лебега мера продолжается на кольцо, в результате чего появляется возможность измерять множества $\Omega \subset X \times Y$ по Лебегу. Сюжет, естественно, сопровождается своей спецификой. В частности: *из σ-аддитивности мер μ и ν вытекает σ-аддитивность меры $\mu \times \nu$.*

Если Ω $(\mu \times \nu)$-измеримо, и

$$\Omega_x = \{y : (x, y) \in \Omega\}, \quad \Omega_y = \{x : (x, y) \in \Omega\},$$

то

$$(\mu \times \nu)(\Omega) = \int_X \nu(\Omega_y)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(\Omega_x)\, d\nu(y).$$

3.10.1. Теорема Фубини. *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по мере $\mu = \mu_x \times \mu_y$, где μ_x и μ_y σ-аддитивные меры на X и Y. Тогда*

$$\int_\Omega f(x, y)\, d\mu = \int_X \left\{ \int_{\Omega_x} f(x, y)\, d\mu_y \right\} d\mu_x = \int_Y \left\{ \int_{\Omega_y} f(x, y)\, d\mu_x \right\} d\mu_y,$$

причем внутренние интегралы существуют почти при всех значениях переменного, по которому идет внешнее интегрирование.

3.11. Задачи и дополнения

• *Любая монотонная*[33] *функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — измерима, ограничена, суммируема и почти всюду дифференцируема.* А также: *может иметь разрывы только первого рода*[34]*, множество которых не более чем счетно.*

• Пусть $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — *канторова лестница*. Тогда функция $g = x + f(x)$ отображает $[0, 1]$ на $[0, 2]$, непрерывна, строго монотонна — и потому взаимно однозначна, причем обратная функция g^{-1} тоже непрерывна[35].

Поскольку интервалы, удаляемые из $[0, 1]$ при построении канторова множества C, функция g отображает на интервалы такой же длины из $[0, 2]$, то

$$\mu\{g([0, 1] \setminus C)\} = \mu\{[0, 1] \setminus C\} = 1,$$

откуда $\mu\{g(C)\} = 1$, т.е. g переводит множество C нулевой меры в множество положительной меры. Но тогда в $g(C)$ существует [21] неизмеримое множество $\widetilde{C}$ — и получается, что гомеоморфизм g переводит измеримое множество $g^{-1}(\widetilde{C}) \subset C$ (меры нуль, потому что C имеет нулевую меру) — в неизмеримое множество.

---

[33] Неубывающая или невозрастающая.

[34] *Разрыв первого рода* характеризуется существованием пределов слева и справа.

[35] Другими словами, g^{-1} — гомеоморфизм $[0, 1]$ на $[0, 2]$.

(!) Подсознание легко мирится со сказанным, пока не вспомнит, что функция g^{-1} измерима, как непрерывная, — и «не может» иметь неизмеримых прообразов измеримых множеств. Здесь настает черед вспомнить, что g и g^{-1} измеримы только по Борелю, — см. комментарии в разделе 3.3 по поводу издержек терминологии.

К слову, $g^{-1}(\widetilde{C}) \subset C$ дает пример измеримого множества, которое не является борелевским.

• В связи с проблемой равенства (3.10) представляет интерес, «почему и насколько»

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Оказывается, любая функция f ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы[36] абсолютно непрерывной компоненты f_{abs}, ***функции скачков*** f_{h} и ***сингулярной функции*** f_{sing},

$$f = f_{\text{abs}} + f_{\text{h}} + f_{\text{sing}}.$$

Под ***функцией скачков*** можно понимать непрерывную слева монотонную (неубывающую) функцию (ступенчатую при конечном числе разрывов либо «предельно ступенчатую»). ***Сингулярная*** — это непрерывная функция, отличная от постоянной, производная которой почти всюду равна нулю. Пример — ***канторова лестница***.

Интеграл от f_{h} и f_{sing} по $[a, b]$ равен нулю. Поэтому при интегрировании вклад дает только только абсолютно непрерывная составляющая,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_{\text{abs}}(x)\,dx.$$

• В случае $\Phi(t) \equiv t$ мера Лебега—Стилтьеса μ_Φ совпадает с обычной мерой Лебега.

Если $\Phi(t)$ ***функция скачков*** с разрывами в точках $\{t_j\}$ и скачками $\{h_j\}$, мера $\mu_\Phi(\Omega) = \sum\limits_{t_j \in \Omega} h_j$ называется ***дискретной***. ***Абсолютно непрерывной мере***[37] отвечает абсолютно непрерывная функция $\Phi(t)$. Наконец, ***сингулярной мере*** отвечает сингулярная функция $\Phi(t)$.

Сингулярная мера μ_Φ сосредоточена на том множестве лебеговой меры нуль, на котором производная $\Phi' \neq 0$ либо не существует.

В соответствии с лебеговским разложением функции $\Phi(t)$ мера μ_Φ представима как сумма дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной мер. Подробности в [11].

---

[36] Это называют *разложением Лебега*.

[37] Каковой является обычная мера Лебега.

• **Неизмеримое множество Витали.** Пусть фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Введем на $[0, 1]$ отношение эквивалентности

$$x \sim y, \quad \textit{если} \quad \{x - y\} \quad \textit{рационально},$$

и отнесем к множеству V по одному элементу из каждого класса эквивалентности (*аксиома выбора*). Определим далее множества V_r как сдвиг V на рациональное r по модулю 1,

$$V_r = \{x : x = \{v + r\},\ v \in V\}.$$

Счетное[38] объединение всех непересекающихся множеств V_r дает весь промежуток $[0, 1]$. Поэтому $\sum\limits_r^{\infty} \mu(V_r) = 1$, чего не может быть, если V измеримо, поскольку в предположении противного все $\mu(V_r) = \mu(V)$.

[38] В силу счетности множества рациональных чисел.

Глава 4

Компактность

Новое звучание в бесконечномерных пространствах приобретают многие привычные (по $\mathbb{R}^n$) понятия. На передний план выдвигается, например, понятие *компактности*.

В отличие от $\mathbb{R}^n$, непрерывная функция на ограниченной замкнутой области функционального пространства часто не достигает своего максимума. Это серьезная головная боль. Максимум на компакте — другое дело.

Классический пример на тему необходимости правильной постановки задачи — вариационная задача Ньютона минимизации функционала

$$J = \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+(y')^2}, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1$$

для поиска тела вращения с наименьшим сопротивлением газовому потоку. При «беспечном» подходе задача не имеет решения, поскольку $J > 0$, но $J(y_n) \to 0$ для

$$y_n(x) = x + \sin^2 n\pi x.$$

Разумеется, это лишь отправная точка для переосмысливания задачи и ее правильной постановки. Потому что Вселенная не перестает существовать, если теория так считает[1].

4.1. Компактные множества

Компактность сближает бесконечномерные пространства с конечномерными. В некоторых чертах, разумеется. Но особенно — в отношении сходимости, что для анализа имеет решающую роль. Главный инструмент на вещественной прямой $\mathbb{R}$ *лемма Больцано—Вейерштрасса* — «существование сходящейся подпоследовательности у любой ограниченной последовательности» — в общем случае перестает работать. Как следствие, в теории образуется пустыня

[1] В то же время здесь к месту тезис Эддингтона: «Пока астрономические наблюдения не подтверждаются теорией, верить им нельзя».

с редкими оазисами содержательно интересных фактов. На базе компактности возникают бесконечномерные обобщения леммы Больцано—Вейерштрасса, — и теория оживает.

4.1.1. Определение. *Множество $M \subset X$ метрического пространства X называется компактным, либо компактом, если всякая последовательность в M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M.*

• *Компакт, как подпространство $M \subset X$, — всегда является полным метрическим пространством.*

• В полном метрическом пространстве пересечение последовательности ограниченных замкнутых вложенных друг в друга множеств (диаметры которых не стремятся к нулю!) может оказаться пустым. *Для компактных множеств такое пересечение всегда не пусто.*

◄ Действительно, пусть $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ — последовательность вложенных компактов, и $x_n \in M_n$. Очевидно, последовательность $\{x_n\} \subset M_1$, поэтому из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $x_{n_k} \to x^*$. *Хвост подпоследовательности*[2] $\{x_{n_k}\}$ лежит в любом M_n, — отсюда $x^* \in M_n$ при любом n. ►

• *Если замыкание некоторого множества U компактно, то само множество U называется* ***предкомпактным***.

При чтении литературы надо иметь в виду, что данной области сопутствует определенная терминологическая неразбериха. Компактность $M \subset X$ иногда называют компактностью в себе, а предкомпактность — компактностью в X, или просто компактностью, окончательно смешивая карты. Не говоря о том, что компактность в данном выше определении называют также бикомпактностью.

В альтернативной терминологии есть своя логика. Определение предкомпактного множества на самом деле подразумевает, что объемлющее пространство оговорено. В противном случае возникает неоднозначность. Множество рациональных точек из $(0, 1)$ предкомпактно в $\mathbb{R}$, но не предкомпактно в пространстве рациональных чисел. Конечно, можно требовать полноту X, но там возникает свой диапазон возможных оговорок.

Признаки компактности. В каждом деле нужны инструменты. Устанавливать компактность «голыми руками» обременительно.

[2] Упоминание о *хвосте последовательности* $\{x_n\}$ подразумевает совокупность ее членов x_n при $n > N$, где N настолько велико, насколько требуется по контексту.

4.1.2. Определение. *Множество U метрического пространства X называется ε-сетью множества $V \subset X$, если для любого $x \in M$ найдется такой элемент $y \in M$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

4.1.3. Теорема Хаусдорфа. *Замкнутое подмножество M полного метрического пространства X компактно тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть множества M.*

◀ *Необходимость.* Пусть M компактно. В предположении противного существует бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset M$ с попарными расстояниями $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, $i \neq j$, что исключает сходимость любой *подпоследовательности* $\{x_n\}$ и приводит тем самым к противоречию[3].

Достаточность. Пусть ε-сеть $M(\varepsilon)$ множества M существует при любом $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset M$ и покажем, что она содержит сходящуюся подпоследовательность.

Зададимся числовой последовательностью $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, — и рассмотрим ε_1-сеть. Совокупность шаров $B(\varepsilon_1, z)$, $z \in M(\varepsilon_1)$, накрывает M, а поскольку этих шаров конечное число, то какой-то из них содержит хвост (бесконечное число элементов) последовательности $\{x_n\}$. Пусть это будет шар B_1.

Далее, аналогично, рассмотрим ε_2-сеть. По той же причине среди шаров $B(\varepsilon_2, z)$, $z \in M(\varepsilon_2)$, найдется шар B_2, содержащий бесконечно много элементов $\{x_n\}$ из тех, что содержатся в B_1. Хвост $\{x_n\}$ будет содержать множество $C_2 = B_2 \backslash B_1$. Продолжение этого процесса порождает последовательность вложенных множеств

$$C_1 = B_1 \supset C_2 = B_2 \backslash C_1 \supset \cdots \supset C_n = B_n \backslash C_{n-1} \supset \cdots,$$

диаметры которых стремятся к нулю[4] и каждое из которых содержит бесконечно много элементов $\{x_n\}$. Выбор по одному элементу $x_{n_k} \in C_k$ дает сходящуюся подпоследовательность. ▶

Упражнения[5]

- Любое компактное метрическое пространство сепарабельно[6].

- Компактность подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ равносильна его замкнутости и ограниченности.

- Компактное множество всегда ограничено[7] и замкнуто.

---

[3] Для построения $\{x_n\}$ достаточно брать на n-м шаге любую точку x_n, отстоящую от всех предыдущих $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ более чем на ε.

[4] В силу $\varepsilon_n \to 0$.

[5] Напомним, что в «Лекциях» упражнения в большей степени являются списком опорных точек.

[6] Объединение всех ε_n-сетей, $\varepsilon_n \to 0$, очевидно, всюду плотно и счетно.

[7] Ограниченность сразу вытекает из *полной ограниченности*, о которой говорят в случае существования конечной ε-сети.

• Замкнутое подмножество компакта — компакт.

• Компакт $M \subset X$ остается компактом при «погружении» X в более широкое метрическое пространство, $X \subset Y$.

• Система множеств $\{F_\alpha\}$ называется *центрированной*, если любая конечная ее подсистема имеет непустое пересечение.

Для компактности замкнутого множества $M \subset X$ необходимо и достаточно, чтобы любая центрированная система $\{F_\alpha\}$ замкнутых подмножеств M имела непустое пересечение. (?)

Система $\{G_\alpha\}$ открытых множеств в метрическом пространстве X называется (*открытым*) *покрытием* множества $M \subset X$, если $M \subset \bigcap_\alpha G_\alpha$.

4.1.4. Лемма о покрытии. *Чтобы замкнутое множество M было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого открытого покрытия M можно было выделить конечное подпокрытие.*

◀ *Необходимость.* Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие M. Допустим, из $\{G_\alpha\}$ нельзя выделить конечное подпокрытие.

Пусть $\varepsilon_n \to 0$, и $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$ — ε_1-сеть M. Тогда

$$M = \bigcup_{i=1}^{n_1} M_i,$$

где M_i — пересечения M с шарами $\overline{B}(\varepsilon_1, x_i)$.

Если у M нет конечного покрытия из $\{G_\alpha\}$, то конечного покрытия нет хотя бы у одного из множеств M_i. Пусть это будет M_{i_1}. Рассматривая далее ε_2-сеть и проводя аналогичное рассуждение по отношению M_{i_1}, получим множество

$$M_{i_2} \subset M_{i_1},$$

также не имеющее конечного покрытия из $\{G_\alpha\}$.

Индуктивное продолжение процесса дает последовательность вложенных компактов, диаметры которых стремятся к нулю, и потому имеющих в пересечении точку $x^* \in M$, неизбежно принадлежащую какому-то G_{α_0}. А поскольку $\operatorname{diam} M_{i_k} \to 0$, то при некотором k справедливо включение $M_{i_k} \subset G_{\alpha_0}$, что приводит к противоречию.

Достаточность. Пусть $\{x_n\} \subset M$ не имеет сходящейся подпоследовательности. Тогда любая точка $x \in M$ принадлежит некоторому шару $B(\varepsilon, x)$, не содержащему точек из $\{x_n\}$ кроме, быть может, *одной* точки x. Эти шары образуют открытое покрытие M, в конечном подпокрытии которого не может содержаться бесконечная последовательность $\{x_n\}$. Противоречие. ▶

Примеры

• *Множество G последовательностей $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \in l_2$, подчиненных требованию*

$$|x_1| \leqslant 1, \quad |x_2| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \ldots,$$

компактно[8].

◀ Для построения ε-сети целое n выбирается из условия $1/2^{n-2} < \varepsilon$, и каждая последовательность $x = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ заменяется точкой

$$\tilde{x} = \{x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots\},$$

в результате G проектируется (по существу, если отбросить нули) на $\mathbb{R}^n$ и дает в проекции множество $\widetilde{G}$, компактное в силу конечномерности. Поэтому у $\widetilde{G}$ существует конечная $\varepsilon/2$-сеть, а расстояние от любой последовательности $x \in G$ до ближайшей точки из $\widetilde{G}$ тоже не превосходит $\varepsilon/2$. ▶

• *Единичный шар $\overline{B}$ в l_2 не компактен.*

◀ Бесконечное множество точек

$$e_j = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\} \in \overline{B}$$

расположены друг от друга на расстоянии $\sqrt{2}$, что исключает возможность построения ε-сети при достаточно малом ε. ▶

• *Единичные шары в C и L_p не компактны.* (?)

4.2. Критерии компактности в C и L_p

Напомним, что функции $x(t)$ из некоторого множества $M \subset C[0, 1]$ называются *равностепенно непрерывными*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $t_1, t_2 \in [0, 1]$, удовлетворяющих неравенству $|t_1 - t_2| < \delta$, выполняется

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \varepsilon$$

для любой функции $x(t) \in M$.

4.2.1. Теорема Арцела. *Для компактности ограниченного*[9] *и замкнутого в $C[0, 1]$ множества M необходимо и достаточно, чтобы функции из этого множества были равностепенно непрерывны.*

---

[8] Множество G называют *гильбертовым кирпичом*.

[9] $|x(t)| < K < \infty$ для любой функции $x(t) \in M$.

◀ *Необходимость.* Пусть M компактно. Тогда по теореме Хаусдорфа при любом ε существует конечная ε-сеть $\{x_{1_\varepsilon}, \dots, x_{n_\varepsilon}\} \subset M$. Функции x_{k_ε} равномерно непрерывны [10], их конечное число, — и потому они равностепенно непрерывны. Это означает: по любому $\eta > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при любом k_ε

$$|x_{k_\varepsilon}(t_1) - x_{k_\varepsilon}(t_2)| \leqslant \eta, \quad \text{как только} \quad |t_1 - t_2| < \delta.$$

Далее остается заметить, что любая функция $x(t) \in M$ попадает в один из ε-коридоров: $x(t) \in x_{k_\varepsilon}(t) \pm \varepsilon$. Возможность взять произвольное ε завершает рассуждение.

Достаточность. Пусть «$x(t) \in M \Rightarrow |x(t)| < K$». Из равностепенной непрерывности функций из M следует, что по любому $\varepsilon' > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \varepsilon'$ при условии $|t_1 - t_2| < \delta$, $x(t) \in M$.

Разобьем прямоугольник $t \in [0, 1]$, $x \in [-K, K]$ точками $\{t_i, x_j\}$,

$$t_1 = 0 < x_2 < \ldots < t_n = 1; \qquad x_1 = -K < x_2 < \ldots < x_m = K$$

так, чтобы

$$t_{i+1} - t_i < \delta, \quad x_{j+1} - x_j < \varepsilon'.$$

Совокупность ломаных с узлами в вершинах построенной сетки [11], рассматриваемых в качестве графиков кусочно-линейных непрерывных функций, дает конечную ε-сеть M. ▶

Приведенные рассуждения в пользу теоремы Арцела принято считать наброском доказательства из-за пренебрежения деталями. Если по ε' (со штрихом) можно подобрать такое δ, что $A < \varepsilon'$, а из этого следует $B < \varepsilon$ при достаточно малом ε (уже без штриха), — то это еще не доказательство. Рассуждение надо обратить, добившись в итоге указания δ по ε без штриха, для чего приходится «стрелять с упреждением», полагая, скажем, $\varepsilon' = \varepsilon/5$ и согласуя звенья цепи.

Такого сорта уточнения требуются почти в каждом доказательстве, и если на них зацикливаться, главное уходит на второй план. Выход из положения — все изучается на «своем» этапе. Дроби — в пятом классе, «ε, δ»-язык — на первом курсе. Потом освоенное применяется «бегло». Если не получается, лучше вернуться и потренироваться. Проценты ли, стереотипные ли схемы «ε, δ»-рассуждений, — все это хорошо работает, когда исполняется в одно касание.

Функции $x(t)$ из некоторого множества $M \subset L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ называются ***равностепенно непрерывными в среднем***, если для любого

[10] В силу непрерывности.

[11] Из точки $\{t_i, x_j\}$ ломаная может идти либо в точку $\{t_{i+1}, x_{j-1}\}$, либо в $\{t_{i+1}, x_{j+1}\}$.

$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|\Delta| < \delta$

$$\left(\int\limits_{\Omega} |x(t+\Delta) - x(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \varepsilon$$

для любой функции $x(t) \in M$.

4.2.2. Теорема Рисса. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Для компактности ограниченного и замкнутого в $L_p(\Omega)$ множества M необходимо и достаточно, чтобы функции этого множества были равностепенно непрерывны в среднем.*

◄ Идеологически доказательство похоже на предыдущее. Построение ε-сети, естественно, должно учитывать специфику L_p. ►

4.3. Инструменты и свойства

При изучении непрерывных отображений интерес представляют закономерности преобразования одних множеств в другие. Например, хорошо известен факт: *прообраз открытого множества — открыт*[12]. Но образ открытого (замкнутого) множества, конечно, открыт (замкнут) не обязательно[13].

4.3.1. Теорема. *Непрерывный образ компакта есть компакт.*

◄ Пусть X — компакт, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Необходимо показать, что образ $f(X)$ компактен в Y.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\} \subset f(X)$, и пусть $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Последовательность $\{x_n\}$ принадлежит компакту X, поэтому она имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x^* \in X$. Из непрерывности f теперь следует $y_{n_k} \to f(x^*)$, т.е. $\{y_n\} \subset f(X)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. ►

4.3.2. Теорема Вейерштрасса. *Непрерывный функционал f, отображающий компакт X в $\mathbb{R}$, ограничен и достигает своих верхней и нижней граней.*

◄ Предыдущая теорема гарантирует, что образ $f(X)$ компактен в $\mathbb{R}$, а значит, — ограничен и замкнут. ►

---

[12] Это может служить определением непрерывности $f : X \to Y$ на всем X.

[13] Пример: функция $\varphi(x) = e^{-x} \cos x$. Образ замкнутого множества $\{k\pi : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ не замкнут, образ открытого $(0, \infty)$ — не открыт.

• Замкнутое множество $K \subset C[0, 1]$ функций таких, что

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad \max_t |x(t)| \leqslant 1,$$

некомпактно, потому что непрерывный функционал

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t)\, dt$$

не достигает на K своей нижней нулевой грани, $f(x_n) \to 0$ для $x_n = t^n$, но $f(x) > 0$ для любой функции $x(t) \in K$.

Функционал $f(x)$ называется *полунепрерывным снизу* (*сверху*), если из $x_n \to x$ следует (при $n \to \infty$)

$$f(x) \leqslant \underline{\lim} f(x_n), \qquad \left(f(x) \geqslant \overline{\lim} f(x_n)\right).$$

В вариационном исчислении широко применяется следующее обобщение теоремы Вейерштрасса.

4.3.3. *Полунепрерывный снизу (сверху) функционал f, отображающий компакт X в $\mathbb{R}$, ограничен снизу (сверху) и достигает на X своей точной нижней (верхней) грани.*

4.3.4. *Функционал $f : M \to \mathbb{R}$, непрерывный на компакте M, равномерно непрерывен*[14] *на M.*

◄ В предположении противного для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ найдутся последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ из M, для которых $x_n - y_n \to 0$, но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

В силу компактности M последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ можно считать сходящимися (в противном случае можно перейти к подпоследовательностям), что приводит к противоречию с непрерывностью f. ►

• Равномерно непрерывный функционал на ограниченном множестве — ограничен, но не обязательно достигает точной нижней и верхней грани.

---

[14] Функционал $f : M \to \mathbb{R}$ *равномерно непрерывен* на M, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, как только $\|x - y\| < \delta$.

4.3.5. Теорема. *В бесконечномерном нормированном*[15] *пространстве L шар не является предкомпактным множеством.*

◄ Допустим противное: шар $B = \{x : \|x\| < 1\}$ предкомпактен. Тогда B покрывается конечным числом шаров $B_1, \dots, B_n$ радиуса $\varepsilon < 1$ с центрами в точках $x_1, \dots, x_n$, которые порождают конечномерное пространство $\widetilde{L} \subset L$. Пусть теперь $\widetilde{L} \subset L_N \subset L$, где L_N — подпространство размерности N. Множества

$$\widetilde{B}_1 = B_1 \cap L_N, \quad \dots, \quad \widetilde{B}_n = B_n \cap L_N, \quad \widetilde{B} = B \cap L_N,$$

очевидно, являются шарами в L_N тех же радиусов, ε и 1, причем $\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n$ покрывают $\widetilde{B}$, и поэтому их объем в сумме больше объема $\widetilde{B}$, что означает $n\varepsilon^N \geqslant 1$, а это невозможно при больших N. ►

Утверждение 4.3.5 означает, что в бесконечномерном банаховом пространстве на единичной сфере всегда можно указать последовательность $\{x_n\}$ без точек сгущения. Вот несколько неожиданный результат в этом направлении.

4.3.6. Лемма. *Каково бы ни было замкнутое подпространство E_0 банахова пространства E, в случае $E_0 \neq E$ на единичной сфере $S = \{x : \|x\| = 1\}$ найдется элемент $z \in S$, удаленный от E_0 на расстояние не менее $1 - \varepsilon$ при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$. Если же E_0 конечномерно, утверждение сохраняет силу при $\varepsilon = 0$.*

◄ Пусть $z^* \notin E_0$ и $r = \inf\limits_{x \in E_0} \|z^* - x\|$. Замкнутость E_0 гарантирует $r > 0$, а также существование (для любого $\varepsilon > 0$) такого элемента x^* в E_0, что

$$r \leqslant \|z^* - x^*\| \leqslant r(1 + \varepsilon).$$

Искомый элемент z есть $z = \dfrac{z^* - x^*}{\|z^* - x^*\|}$, что легко проверяется.

Пусть теперь E_0 конечномерно, и $\widetilde{E}_0$ обозначает пространство, натянутое на E_0 и вектор $z^* \notin E_0$. По доказанному выше любой последовательности $\varepsilon_k \to 0$ отвечает последовательность $\{z_k\} \subset \widetilde{E}_0$ такая, что

$$\|z_k\| = 1, \quad \rho(z_k, E_0) \geqslant 1 - \varepsilon_k.$$

В силу конечномерности $\widetilde{E}_0$ в $\{z_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность к некоторой точке $z \in S$, удовлетворяющей, очевидно, условию $\rho(z, E_0) = 1$. ►

Лемма 4.3.6 эффективно работает в различных ситуациях.

[15] Указание на нормированность автоматически подразумевает линейность пространства.

4.3.7. Теорема. *Для конечномерности банахова пространства E необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное множество из E было предкомпактно.*

◀ *Необходимость* вытекает из утверждения 4.3.5. *Достаточность.* Предположим, каждое ограниченное множество из E предкомпактно. Возьмем произвольный элемент $x_1 \in E$ единичной длины, $\|x_1\| = 1$, и пусть E_1 — линейное пространство, порождаемое элементом x_1. Если $E_1 \neq E$, выберем другой элемент единичной длины, $\|x_2\| = 1$, удовлетворяющий условию $\|x_2 - x_1\| = 1$ (лемма 4.3.6), и пусть E_2 — линейное пространство, натянутое на векторы x_1, x_2. Если $E_2 \neq E$, возьмем следующий элемент, $\|x_3\| = 1$, удовлетворяющий условиям

$$\|x_3 - x_1\| = 1, \quad \|x_3 - x_2\| = 1.$$

И так далее. Возможность выбора каждой следующей точки с соблюдением условий $\|x_n - x_m\| = 1$ при $n > m$ гарантирует лемма 4.3.6.

Процесс либо обрывается на конечном шаге, и тогда E конечномерно, $E_N = E$, либо — не обрывается, но тогда ограниченная последовательность $\{x_n\}$ не предкомпактна[16]. ▶

[16] Поскольку не фундаментальна: $\|x_n - x_m\| = 1$ при $n \neq m$.

Глава 5

Топологический ракурс

Функциональный анализ по объему — велик. Причина — в плодородии почвы, в неисчерпаемости и разнообразии задач. Всяк входящий находит себе что-нибудь по плечу, и угроза тяжелого физического труда отодвигается. Это основной источник развития математики, как и любой другой науки.

Публика думает, конечно, что математику развивают во благо Галактики, а не потому, что так жизнь складывается. Однако Вселенная устроена по-другому. Травы растут, потому что «так получается». А уж на пшеницу и сорняки их делит кто-то другой. Зайцу нравится морковка, колорадскому жуку — картофельная ботва. На одном поле одуванчик — «головная боль», на другом — целебный продукт.

В функциональном анализе — приблизительно так же. Пример — топологические пространства, без которых обходятся 99 % прикладных задач. Но из топологических пространств многое по-другому смотрится. Новый взгляд, новое освещение. Безусловно, вычеркни эти пространства из головы, и по большому счету не найдешь, чтó бы такое важное потерялось, если не говорить об удобствах. Но запрети топологию, — и математика поблекнет. Ничего страшного, казалось бы. Немного больше углекислого газа в атмосфере, светимость Солнца чуть меньше...

5.1. Топологические пространства

Метрика ρ в X позволяет определить открытые множества, после чего о ρ можно забыть, сохранив бóльшую часть теории. Но систему открытых множеств можно определить также посредством аксиом. Это и есть путь, ведущий к *топологическим пространствам*. При этом достигается бóльшая общность — в поле зрения попадают не только метрические пространства. Но главное, пожалуй, в другом. В ином взгляде на предмет, в появлении новых инструментов, в упрощении доказательств, в формировании новых идей, которые на старом языке плохо выражались и были, потому, незаметны.

5.1.1. Определение. *Топологическим пространством называется множество X, в котором выделено некоторое семейство τ* ***открытых*** *подмножеств, удовлетворяющее двум требованиям:*

- *Само X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ.*
- *Сумма* ***любого*** *и пересечение* ***конечного*** *числа множеств из τ принадлежат τ.*

Семейство τ называют ***топологией***. В известной степени это терминологическая накладка, потому что *топологией* еще называется раздел математики, в котором изучаются свойства геометрических фигур, сохраняющиеся при гомеоморфных преобразованиях[1].

Понятно, что на одном и том же множестве X могут быть заданы разные топологии. Говорят, что топология τ_2 *слабее* топологии τ_1, и пишут $\tau_2 \subset \tau_1$, если

$$\Omega \in \tau_2 \quad \Rightarrow \quad \Omega \in \tau_1.$$

• Пересечение любого множества топологий — есть топология. (**?**)

• Какова бы ни была совокупность подмножеств X, существует *минимальная* (по включению) *топология*, его содержащая. (**?**)

Окрестностью точки $x \in X$ объявляется любое открытое множество, содержащее эту точку[2]. Пространство (X, τ) называется ***хаусдорфовым*** (как и топология τ), если у различных точек существуют *непересекающиеся* окрестности[3].

Множество $U \subset X$ определяется как ***замкнутое***, если его дополнение $\overline{U} = X \backslash U$ открыто. ***Замыканием*** $\overline{U}$ считается пересечение всех замкнутых множеств, содержащих U (наименьшее, по включению, замкнутое множество, содержащее U). ***В хаусдорфовых пространствах точки, равно как и счетные их множества, — замкнуты.***

[1] Конечно, то и другое где-то в эмпиреях сходится. Там, где все сходится.

[2] Это оказывается намного удобнее шаров — пропадает необходимость в доказательствах возиться с разными «эпсилон».

[3] При этом говорят об *аксиоме отделимости Хаусдорфа*. Все метрические пространства хаусдорфовы.

Система θ замкнутых множеств *похожа* на τ:

- Само X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат θ.
- Сумма **конечного** и пересечение **любого** числа множеств из θ принадлежат θ.

Перестановка «конечного» и «любого» не позволяет в общем случае объявить замкнутые множества открытыми.

Примеры

- Совокупность открытых множеств метрического пространства является топологией.
- *Пространство слипшихся точек*: топология тривиальна, состоит из двух множеств: X и $\varnothing$. Замыкание любого подмножества X дает целиком X.
- *Дискретная топология*: совпадает с 2^X, т. е. с множеством всех подмножеств X. Все подмножества X одновременно открыты и замкнуты. Вместе с пространством слипшихся точек — это две крайние точки диапазона, которые служат источниками многочисленных контрпримеров. Дискретная топология *метризуема* — порождается метрикой: $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$.
- *Связное двоеточие*: топология τ состоит из трех множеств $X = \{a, b\}$, $\varnothing$ и $\{a\}$.

Множество $K \subset X$ ***компактно***, если каждое его *покрытие* открытыми множествами содержит *конечное подпокрытие*[4]. При компактности X топологию называют *компактной*.

Если на множестве $U \subset X$ считать открытыми множества $U \cap \Omega$, где $\Omega \in \tau$, то система τ_U таких подмножеств является топологией на U. Ее называют *наследуемой* (или *индуцированной*) топологией из X.

Связность. Пространство X называется *связным*, если в его топологии нет, кроме X и $\varnothing$, других множеств, одновременно открытых и замкнутых. Характеристическое свойство: *связное пространство нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых непустых множеств*[5].

Пространство X считается *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $P : [0, 1] \to X$ такое, что $P(0) = a$, $P(1) = b$, т. е. любые две точки

---

[4] Определение компактности — другое, но в метрическом пространстве разногласий не возникает в силу леммы 4.1.4.

[5] При непрерывном отображении образ связного X — связен. (**?**)

могут быть соединены непрерывной кривой, целиком лежащей в X. *Линейная связность влечет за собой связность — обратное неверно.*

Пространство слипшихся точек — не связно. (**?**)

Отделимость. При изучении топологических пространств употребительны различные градации (*аксиомы*) *отделимости.* Наиболее жесткая из них — требует существования непересекающихся окрестностей у непересекающихся замкнутых множеств. В этом случае пространство считается *нормальным.* Все метрические пространства нормальны (теорема 2.2.1). Менее жестко требование *хаусдорфовости* — наличия непересекающихся окрестностей у двух несовпадающих точек.

База. Семейство $\widehat{\tau} \in \tau$ называется *базой* топологии τ, если любой элемент (открытое множество) из τ представи́м в виде объединения элементов из $\widehat{\tau}$. В метрическом пространстве базу образуют открытые шары.

Локальной базой в точке $x \in X$ называют такую совокупность σ окрестностей точки x, что любая окрестность x содержит окрестность x из σ.

Сходимость. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ считается *сходящейся* к точке x, если любая окрестность x содержит *хвост* $\{x_n\}$, т. е. все точки $\{x_n\}$, начиная с некоторой.

В топологическом пространстве сходимость может «вырождаться». Объявим, например, открытыми множества, получаемые выбрасыванием из $[0, 1]$ конечного или счетного множества точек. Это превращает $[0, 1]$ в топологическое (не хаусдорфово) пространство, в котором для сходимости $\{x_n\}$ необходимо, чтобы x_n не менялось, начиная с некоторого $n = n_0$.

Подобные неприятности в практических задачах не встречаются, но при формулировке общих теорем их надо иметь в виду.

Непрерывность. Оператор $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* x, если по любой окрестности V точки $y = f(x)$ можно указать окрестность U точки x такую, что $\boxed{f(U) \subset V}$.

В метрическом пространстве эта дефиниция соответствует обычному «ε, δ»-определению. Интересно (а иногда и полезно), что непрерывность f на всем X, стандартно определяемая как непрерывность f в каждой точке $x \in X$, *равносильна открытости любого прообраза* $f^{-1}(\Omega) \subset X$ *открытого множества*[6] $\Omega \subset Y$. (?)

5.2. Линейные пространства

При задании топологии на линейном пространстве E дополнительно предполагается *непрерывность операций сложения и умножения на числа*[7].

Это означает, что для любых $x, y \in E$ и окрестности U_{x+y} найдутся такие окрестности U_x, U_y (точек x, y), что $U_x + U_y \subset U_{x+y}$. По части умножения: для любых $x \in E$, λ и окрестности $U_{\lambda x}$ можно указать такую окрестность U_x и $\varepsilon > 0$, что $\mu U_x \subset U_{\lambda x}$ при $|\lambda - \mu| < \varepsilon$.

Линейное топологическое пространство называют *локально выпуклым*, если существует локальная база из выпуклых окрестностей.

Каждая *локально выпуклая топология* может быть задана с помощью семейства полунорм $\{p_\alpha(x)\}$: локальная база определяется конечными пересечениями множеств вида $\{p_\alpha(x)\}$.

Если задающее семейство полунорм счетно, $\{p_k(x)\}$, топология *метризуема*[8] с помощью метрики

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)},$$

но и в этом случае топологический взгляд более удобен.

В линейных топологических пространствах, несмотря на отсутствие метрических атрибутов, появляется возможность говорить о *фундаментальных последовательностях*[9] и *ограниченных множествах*[10].

[6] Либо замкнутости любого прообраза замкнутого множества.

[7] Т. е. непрерывность отображений $z = x + y$ и $z = \alpha x$.

[8] Топология называется *метризуемой*, если существует метрика, определяющая данную топологию.

[9] Последовательность $\{x_n\}$ *фундаментальна*, если по любой окрестности V нуля можно указать такое N, что $x_n - x_m \in V$ при $n, m > N$.

[10] Подмножество $X \subset E$ ограничено, если для любой окрестности нуля U найдется такое T, что $X \subset tU$ при $t > T$.

Примеры

• *Пространство* $C(-\infty, \infty)$ непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций $x(t)$. За определяющую систему полунорм принимают

$$p_n(x) = \max\left\{|x(t)| : t \in [-n, n]\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Сходимость при этом означает равномерную сходимость на любом ограниченном множестве.

• *Пространство* $C^{\infty}[0, 1]$ бесконечно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций. Определяющая система полунорм:

$$p_n(x) = \max\left\{|x^{(n)}(t)| : t \in [0, 1]\right\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Сходимость равносильна равномерной сходимости производных всех порядков[11].

• *Пространство* $C^{\infty}(-\infty, \infty)$ бесконечно дифференцируемых на всей оси функций. Система полунорм:

$$p_{kn}(x) = \max\left\{|x^{(k)}(t)| : t \in [-n, n]\right\},$$
$$n = 1, 2, \ldots, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Сходимость равносильна равномерной сходимости производных всех порядков на любом ограниченном множестве.

Все перечисленные пространства *не нормируемы*[12]. Вещественная прямая в приведенных примерах с помощью очевидных видоизменений может быть заменена на $\mathbb{R}^n$.

5.3. Слабая топология

Экзотические примеры топологий типа *пространства слипшихся точек* либо *связного двоеточия* рассматриваются, как правило, чтобы понять, какого рода «опасности» сопутствуют общим рассуждениям. Наиболее массовыми и мотивированными примерами служат метрические пространства. Но здесь топология дает лишь новый язык.

[11] Производная нулевого порядка — сама функция.

[12] Для нормируемости линейного топологического пространства необходимо и достаточно существование выпуклой ограниченной окрестности нуля.

До определенных пор казалось, что метрической технологии хватает на все случаи жизни. Однако по мере возрастания аппетитов в поле зрения стали попадать множества обобщенных, бесконечно дифференцируемых и других функций, где топология требовалась уже по существу, — по крайней мере, предлагала естественные категории мышления для рассматриваемых задач.

Примеры из предыдущего раздела очевидным образом коррелируют со следующей общей схемой.

Слабая топология задается локальной базой нуля [13] линейного пространства E, состоящей из конечных пересечений областей вида

$$\Omega = \{x : |f(x)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $f : E \to \mathbb{R}$ обозначает произвольный непрерывный линейный функционал [14].

Это самая слабая топология в E, в которой непрерывны все линейные функционалы, непрерывные в исходной топологии E.

В бесконечномерном линейном пространстве E всякая слабая окрестность нуля содержит бесконечномерное подпространство. (**!?**)

В линейных нормированных пространствах слабая топология приводит к важному понятию слабой сходимости (раздел 6.4): последовательность $\{x_n\} \subset E$ называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in E$, пишут $x_n \xrightarrow{w} x$, если для любого непрерывного линейного функционала f числовая последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x)$.

5.4. Задачи и дополнения

• Минимальная (по включению) топология, содержащая заданное семейство подмножеств $\Phi \subset 2^X$, всегда существует (**?**) и называется *топологией, порожденной семейством* Φ.

• Топология компактного хаусдорфова пространства обладает определенной жесткостью. Ее нельзя ослабить, не нарушив хаусдорфовость, и нельзя усилить, не потеряв компактность [17].

[13] Локальные базы других точек получаются сдвигом.

[14] В $\mathbb{R}^n$ такие пересечения являются выпуклыми многогранниками.

• Если одно из множеств A, B открыто, то $A + B$ открыто. Если одно из A, B замкнуто, а другое компактно, то $A + B$ замкнуто. (?)

• Пусть $f : X \to Y$, и в Y задана топология τ. Совокупность прообразов $f^{-1}(\Omega)$, $\Omega \in \tau$, — является топологией в X. (?)

Если в X и Y заданы топологии τ_x и τ_y, то для непрерывности отображения $f : X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы τ_x была сильнее топологии $f^{-1}(\tau_y)$. (?)

• Линейное топологическое пространство называют *локально компактным*, если существует окрестность нуля, замыкание которой компактно.

5.4.1. Теорема. *Всякое локально компактное пространство X конечномерно. Любой компакт в бесконечномерном пространстве нигде не плотен.*

Этот результат родствен теореме 4.3.7. Приведем доказательство [17], демонстрирующее технику, обходящуюся без опоры на метрику.

◄ Пусть V — окрестность нуля с компактным замыканием. Из компактности $\overline{V}$ следует существование такой *сети* $\{x_1, \dots, x_n\}$, что

$$\overline{V} \subset \left(x_1 + \frac{1}{2}V\right) \bigcup \dots \bigcup \left(x_n + \frac{1}{2}V\right).$$

Обозначим через L (замкнутое конечномерное) подпространство X, натянутое на $\{x_1, \dots, x_n\}$. Очевидно[15],

$$V \subset L + \frac{1}{2}V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}V \subset L + \frac{1}{4}V \quad \Rightarrow \quad V \subset L + \frac{1}{4}V.$$

Продолжение процесса в итоге дает

$$V \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} (L + 2^{-k}V),$$

а поскольку $\{2^{-k}V\}$ — локальная база нуля, то $V \subset \overline{L}$. Но $\overline{L} = L$, поэтому $V \subset L$ $\Rightarrow \alpha V \subset L$ при любом $\alpha > 0$, что в конце концов обеспечивает $L = X$.

Вторая часть теоремы легко доказывается от противного. ►

• **Почти периодические функции** в контексте данного тома не имеют самостоятельного значения, но они удачно дополняют «пейзаж». Чтобы не создавалось впечатления, что функциональный анализ лишь инструмент для работы в C и L_p. Для прагматических целей, возможно, пространств C и L_p достаточно. Но еще необходимо ощущение среды, окружения, нетривиальных возможностей.

Скалярную функцию $x(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ называют *почти периодической*[16], если множество ее *сдвигов* $x_s(t) = x(t+s)$ компактно в $C_*(\mathbb{R})$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - y(t)|.$$

[15] Под суммой множеств подразумевается множество сумм пар элементов. Молчаливо используется также $\frac{1}{2}L = L$.

[16] По Бохнеру.

Определение, конечно, выглядит заумно и никак не коррелирует с интуитивными представлениями о «почти периодичности». Но оно оказывается удобным в работе.

Первоначальное определение Г. Бора носило более приземленный характер. Скалярная функция $x(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ ***почти периодична***, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое Δ, что в любом промежутке $[t, t+\Delta]$ найдется точка τ, для которой

$$|x(t) - x(t+\tau)| < \varepsilon \quad \text{при любом} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оба определения эквивалентны друг другу. (**?**)

• Для развития «топологического чутья» существенно рассмотрение необычных ситуаций. В этом отношении вне конкуренции, конечно, ***парадокс Брауэра*** о совпадении границ у миллиона разных областей [2]. Но есть масса других неожиданных фактов, хотя и менее фундаментальных.

Допустим, например, Γ — граница открытого множества Ω в обычном пространстве. Достижимы ли точки $x \in \Gamma$ изнутри, из Ω? Не обязательно. Точнее говоря, не всегда точку $x \in \Gamma$ можно соединить с какой-нибудь точкой из Ω непрерывной кривой.

Контрпример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ внутренность Ω бесконечного цилиндра, диаметр которого на бесконечности быстро устремим к нулю. После этого будем наматывать «цилиндр» на некоторую окружность C, с каждым витком приближаясь к окружности, но не пересекая ее. В границу Γ финальной «картинки» войдет не только боковая поверхность «цилиндра», но и окружность C. Точки $x \in C$ не будут достижимы изнутри.

Глава 6

Линейные операторы в нормированных пространствах

6.1. Основные понятия

Напомним определение: оператор $A : E_x \to E_y$ *линеен*, если *аддитивен*,

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

и *однороден*,

$$A(\lambda x) = \lambda Ax.$$

Обычно предполагается, что Ax имеет смысл при любом $x \in E_x$. В общем случае у оператора A есть *область определения* $\mathbf{D}_A$ и *область значений* $\mathbf{R}_A$, которые, разумеется, обязаны быть линейными многообразиями.

Конечномерные примеры таких операторов хорошо известны из линейной алгебры, откуда — «по образу и подобию» — проистекают многие истины и задачи функционального анализа. Оттуда же проистекают заблуждения, поскольку в бесконечномерном случае иная «роза ветров».

В обычной ситуации

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, n),$$

— вопрос о непрерывности $y = Ax$ даже не поднимается из-за самоочевидности [1]. Но в бесконечномерных пространствах непрерывность преобразований — уже не факт. Плюс к тому, появляются вопросы, которые в $\mathbb{R}^n$ не имеют смысла.

Оператор D дифференцирования, $y(t) = \dot{x}(t)$, например, можно определить на линейном подпространстве $L \subset C[0, 1]$ непрерывно дифференцируемых функций (плотном в $C[0, 1]$), но тогда $D : L \to C[0, 1]$, как линейный оператор, — не непрерывен

[1] Если не считать экзотики [2], связанной с аксиомой выбора.

и не ограничен [2]. Это достаточно банальная ситуация, демонстрирующая возможные источники неприятностей.

В то же время надо иметь в виду, что указать такого сорта оператор, действующий из C в C, нелегко. Соответствующий пример может быть получен из предыдущего продолжением оператора D с L на $C[0, 1]$, но для этого приходится опираться на аксиому выбора (приблизительно по схеме, используемой в доказательстве *теоремы Хана—Банаха*).

Определение непрерывности уже давалось в разделе 1.6. Эквивалентный вариант: оператор $A : X \to Y$ *непрерывен* в точке x_0, если

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_n \to Ax_0.$$

Тривиальный факт:

• *Линейный оператор, непрерывный в какой-либо точке, непрерывен — в любой другой, т. е. на всем пространстве.* (**?**)

Линейный оператор A называется *ограниченным*, если существует константа γ такая, что

$$\|Ax\| \leqslant \gamma\|x\|. \tag{6.1}$$

Наименьшее γ в неравенстве (6.1) называется *нормой линейного оператора* A и обозначается символом $\|A\|$. Иными словами,

$$\boxed{\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.} \tag{6.2}$$

Норма оператора $Gx = \int\limits_\Omega G(t, s)x(s)\,ds$ в $C(\overline{\Omega})$ определяется равенством

$$\|G\| = \max_{t\in\overline{\Omega}} \int\limits_\Omega |G(t, s)|\,ds. \quad (\textbf{?})$$

В ситуации, когда оператор действует из одного пространства в другое, $A : E_x \to E_y$, *в формулах типа* (6.1) *фигурируют на самом деле разные нормы и, строго говоря, надо было бы писать*

$$\|Ax\|_{E_y} \leqslant \gamma\|x\|_{E_x},$$

[2] Некоторые ограниченные множества переводит в неограниченные.

но это засоряет панораму. Поэтому предпочтение отдается упрощенным обозначениям. Тем более что множество необходимых уточнений все равно неисчерпаемо.

6.1.1. Лемма. *Непрерывность линейного оператора равносильна ограниченности.*

◄ Из $x_k \to 0$, т.е. $\|x_k\| \to 0$, и $\|Ax_k\| \leqslant \gamma\|x_k\|$ — следует $\|Ax_k\| \to 0$. Это доказывает импликацию «ограниченность ⇒ непрерывность».

Обратно. Пусть образ $A\Omega$ ограниченного множества Ω — неограничен. Но тогда и множество $\frac{1}{k}A\Omega$ неограниченно при любом k, из чего следует существование в Ω последовательности $\{x_k\}$, для которой $u_k = \frac{x_k}{k} \to 0$. Следовательно, $\|Au_k\| \geqslant \varepsilon > 0$, что противоречит непрерывности A. ►

Линейный функционал $f : E \to \mathbb{R}$ ограничен, в частности, если $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| < \infty$. Число

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \tag{6.3}$$

называется *нормой линейного функционала* f.

• Ядро линейного функционала[3] $\ker f$ образует *максимальное линейное многообразие*[4]. Множества вида

$$M = \{x : f(x) = \alpha \neq 0\}$$

называют *гиперплоскостями*. Гиперплоскости, очевидно, получаются сдвигом нуль-пространств.

• Для непрерывности линейного функционала f необходимо и достаточно, чтобы ядро $\ker f$ было замкнуто. Если f не непрерывен, ядро $\ker f$ плотно в E. (?)

Пространство линейных операторов. На множестве линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 естественным образом вводятся операции:

$$(A + B)x = Ax + Bx, \quad (\lambda A)x = \lambda Ax,$$

[3] Т. е. нуль-пространство: совокупность элементов, для которых $f(x) = 0$.

[4] Линейное многообразие называют *максимальным*, если оно не совпадает с E и не содержится ни в каком другом линейном многообразии, кроме E.

в силу чего совокупность линейных операторов $A : E_1 \to E_2$ образует *линейное пространство* $\mathcal{E}(E_1, E_2)$, которое становится банаховым после введения нормы (6.2). Пространство $\mathcal{E}(E_1, E_2)$ остается банаховым, даже если E_1 неполно (т. е. просто линейно нормированное пространство).

6.2. Теорема Хана—Банаха

6.2.1. Теорема. *Всякий линейный ограниченный функционал f, определенный на линейном многообразии E_0 линейного нормированного пространства E, можно продолжить на все пространство, не увеличивая нормы f.*

Задача продолжения линейного функционала в анализе возникает довольно часто. Например, интеграл Лебега сначала определяется на многообразии E_0 простых функций, а потом продолжается по непрерывности на все пространство измеримых функций. Такого сорта продолжения, правда, обеспечиваются менее общим результатом:

6.2.2. Лемма. *Всякий линейный ограниченный функционал f, определенный на линейном многообразии $E_0 \subset E$, всюду плотном в E, однозначно продолжается (по непрерывности) на все пространство без увеличения нормы f.*

Сама формулировка теоремы 6.2.1 несколько далека от непосредственных практических потребностей, но вот ее часто используемые следствия:

• *Пусть x_0 ненулевой элемент из E. Тогда существует линейный функционал f такой, что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$.*

◄ На $E_0 = \{x : x = tx_0,\ t \in \mathbb{R}\}$ определим функционал $f(x) = t\|x_0\|$, если $x = tx_0$. Его продолжение на E по теореме 6.2.1 дает искомый функционал. ►

Другие следствия выводятся не намного сложнее.

• *Через любую точку x_0 на поверхности единичного шара B можно провести опорную гиперплоскость*[5] *к B.*

[5] Т. е. задать такой линейный функционал f, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in B$.

• *Пусть линейное многообразие* $E_0 \subset E$ *и* $x_0 \neq 0$. *Тогда на* E *существует такой линейный функционал* f, *что* $f(x) = 0$ *для любого* $x \in E_0$, $f(x_0) = 1$ *и*

$$\|f\| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in E_0} \|x - x_0\|}.$$

• *Любые неравные элементы* u, v *в локально выпуклом пространстве могут быть разделены некоторым линейным функционалом* f, *в смысле*

$$f(u) \neq f(v).$$

◄ *Доказательство теоремы* 6.2.1 состоит из двух этапов. На первом — устанавливается возможность подходящего продолжения функционала f с E_0 на многообразие $E_1 \subset E$, натянутое на $\{E_0, z\}$, где $z \notin E_0$.

Любой элемент $u \in E_1$ однозначно представим в виде $u = \tau z + x$, $x \in E_0$. Поэтому линейное продолжение функционала f неизбежно имеет вид

$$f_1(\tau z + x) = \tau f_1(z) + f(x),$$

и вся свобода маневра заключается в выборе константы $f_1(z)$, которой, как оказывается, можно так распорядиться, что норма функционала не возрастет. Это чисто техническая задача, решение есть в любом учебнике (см. [11, 15]).

Идеологический интерес представляет второй этап. Как от «увеличения размерности E_0 на 1» проложить дорогу к бесконечности? В случае сепарабельного E это делается «шаг за шагом»: функционал последовательно распространяется на

$$E_1 = \{E_0, x_0\}, \quad \dots, \quad E_{k+1} = \{E_k, x_k\}, \quad \dots,$$

где $x_k \notin E_k$ выбираются из счетного всюду плотного в E множества. В итоге получается искомое продолжение f на все E.

В несепарабельном случае возникает принципиальная заминка, и здесь без аксиомы выбора выхода из положения нет. Проще всего опереться на вариант *леммы Цорна*. Делается это так.

Рассматриваются всевозможные продолжения исходного функционала, которые частично полуупорядочены по включению областей определения:

$$f' \leqslant f'', \quad \text{если} \quad \mathbf{D}_{f'} \subset \mathbf{D}_{f''}.$$

В совокупности таких «продолжений» любое упорядоченное подмножество ограничено сверху функционалом, определенным на объединении областей определения. Условия леммы Цорна выполнены — максимальный элемент, представляющий искомый функционал, существует. ►

6.3. Сопряженное пространство

Если f_1 и f_2 — ограниченные линейные функционалы на банаховом пространстве E, то функционал $f = \alpha f_1 + \beta f_2$,

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \quad x \in E,$$

также линеен и ограничен.

Поэтому совокупность всех ограниченных линейных функционалов, определенных на E, образует линейное пространство, которое называется ***сопряженным*** к E и обозначается E^*. Норма в E^* определяется формулой (6.3).

Значение функционала $f \in E^*$ в точке $x \in E$ будем обозначать, наряду с $f(x)$, как и скалярное произведение, через $\langle f, x\rangle$.

• Обозначение $f(x) = \langle f, x\rangle$ вызывает полезные ассоциации, подчеркивая некое равноправие x и f, которое в гильбертовом пространстве, казалось бы, превращается в истинное. Но это иллюзия. Даже когда $\langle f, x\rangle$ есть перестановочное скалярное произведение, а пространство конечномерно, замаскированное различие становится явным в случае преобразования переменных, x и f подчиняются разным законам преобразования координат[6].

• Отсутствие в банаховом пространстве скалярного произведения в какой-то степени компенсируется функционалами. Вместо ортогональности говорят, например, о *биортогональных векторах* $x \in E$ и $f \in E^*$ в случае $\langle f, x\rangle = 0$, а также о *биортогональных последовательностях* $\{x_n\}$, $\{f_n\}$ в случае $\langle f_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — *символ Кронекера*[7].

6.3.1. Теорема. *Сопряженное пространство E^* всегда банахово, т. е. полно (независимо от полноты E).*

◄ Пусть $\{f_n\} \subset E^*$ фундаментальная последовательность линейных ограниченных функционалов, т.е. $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и $n, m > N(\varepsilon)$.

Это означает

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon\|x\|. \tag{6.4}$$

[6] См.: *Босс В.* Лекции по математике: Линейная алгебра. Т. 3. М.: УРСС, 2005 — о ковариантных и контравариантных векторах.

[7] Равный единице при $i = j$ и — нулю при $i \neq j$.

Поэтому $\{f_n(x)\}$ сходится при любом фиксированном x. Легко проверяется, что функционал

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

линеен и ограничен[8]. Последнее ясно из

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\|x\|, \tag{6.5}$$

что получается переходом к пределу по $m \to \infty$ в (6.4).

Из (6.5) следует также, что $\{f_n\}$ сходится к функционалу f по норме сопряженного пространства. ▶

Рефлексивные пространства. *Второе сопряженное пространство*

$$(E^*)^* = E^{**},$$

как пространство линейных функционалов на E^*, разумеется, также банахово. Любой вектор $x \in E$ можно рассматривать как элемент из E^{**}, если в $f(x) = \langle f, x\rangle$ функционал $f \in E^*$ считать переменным, а x — фиксированным. Тогда $\langle f, x\rangle$ определяет некоторый функционал, определенный на E^*. Но отсюда не следует, что E^{**} тождественно E, поскольку могут существовать функционалы $\varphi : E^* \to \mathbb{R}$, не представимые в виде $\langle f, x\rangle$. Если таких функционалов нет, пространство E называется *рефлексивным*, и его можно отождествить с E^{**}. В общем случае $E \subset E^{**}$ (с точностью до изоморфизма).

• Любое замкнутое подпространство рефлексивного пространства рефлексивно.

• Гильбертово пространство рефлексивно.

• **Теорема.** *Для рефлексивности банахова пространства E необходимо и достаточно, чтобы любой ограниченный линейный функционал f на E достигал своей верхней грани на единичной сфере (чтобы существовал элемент x единичной нормы, на котором $f(x) = \|f\|$).*

• При описании сопряженного пространства имеется определенный произвол, связанный с выбором способа задания линейных функционалов[9]. Различия, конечно, возможны лишь с точностью до изоморфизма.

---

[8] См. следствия из *принципа равномерной ограниченности.*

[9] Не говоря о том, что форма задания (охватывающая все функционалы) не всегда известна.

$\boxed{L_p^* = L_q}$. Любой линейный непрерывный функционал в $L_p[0,1]$, $p > 1$, может быть задан в форме (интегрирование по Лебегу)

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt, \qquad y(t) \in L_q[0,1], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Норма, в соответствии с (6.3),

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

В итоге $L_p^* = L_q$.

$\boxed{L_1^* = L_\infty}$. Снова $f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$, но уже при условии ограниченности $y(t)$. Тот же рецепт (6.3) приводит к норме

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |y(t)|,$$

что обеспечивает $L_1^* = L_\infty$.

$\boxed{C^* = V}$. Всякий линейный функционал в $C[0,1]$ выражается интегралом Стилтьеса:

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t) \qquad (\textit{теорема Рисса}).$$

Норма функционала оказывается равна вариации функции g, $\|f\| = V_0^1(g)$. Таким образом, сопряженным C оказывается пространство функций с ограниченной вариацией[10].

$\boxed{\mathbb{R}^n(?)}$. В конечномерном пространстве переход к сопряженному пространству меняет норму. Например[11],

$$\|x\| = \max_i |x_i| \quad \Leftrightarrow \quad \|f\| = \sum_{i=1}^n |f_i|,$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad \Leftrightarrow \quad \|f\| = \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^q\right)^{1/q}.$$

---

[10] С неуклюжей оговоркой об отождествлении функций, отличающихся в точках непрерывности на постоянное слагаемое.

[11] См.: *Босс В.* Лекции по математике: Линейная алгебра. Т. 3. М.: УРСС, 2005 — о двойственных нормах.

Сопряженный оператор. Если A — линейный оператор, то $f(Ax) = \langle f, Ax\rangle$ — есть некоторый линейный функционал $g(x) = \langle g, x\rangle$. *Сопряженный оператор* A^* определяется условием $g = A^*f$, т.е.

$$\boxed{\langle f, Ax\rangle = \langle A^*f, x\rangle.}$$

Иными словами, если $f(x)$ меняется в связи с воздействием на аргумент линейного преобразования A, то A^* позволяет достичь того же результата, не трогая x, а воздействуя на функционал: $f \Rightarrow A^*f$.

В случае $A : E_1 \to E_2$ сопряженный оператор A^* действует из E_2^* в E_1^*. Более подробно сопряженные операторы рассматриваются в главе 7.

6.4. Слабая сходимость

Последовательность $\{x_n\} \subset E$ в линейном нормированном пространстве называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in E$, — пишут $x_n \xrightarrow{w} x$, — если для любого $f \in E^*$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Точку x называют *слабым пределом* $\{x_n\}$.

Обычную сходимость в противовес слабой называют — *сильной*, и обозначают либо просто $x_n \to x$, либо $x_n \xrightarrow{s} x$.

(!) Последовательность линейных функционалов $\{f_n\} \subset E^*$ называют *слабо сходящейся* к функционалу $f \in E^*$, — обозначение $f_n \xrightarrow{w} f$, — если $f(x_n) \to f(x)$ для любого $x \in E$. Иными словами, *слабая сходимость последовательности функционалов — это поточечная сходимость.*

(!) Обратим внимание, что так определенная слабая сходимость функционалов в нерефлексивном случае, $E \neq E^{**}$, не совпадает со слабой сходимостью в E^* как обыкновенном банаховом пространстве. Это запутывает ситуацию вплоть до головокружения. Во избежание путаницы слабую сходимость функционалов называют также $(*)$-*слабой*, но хрен редьки не слаще. Проще, пожалуй, когда речь идет о слабой сходимости функционалов, $(*)$-слабую — подразумевать, считая упоминание функционалов как бы паролем.

В рефлексивных пространствах, в том числе гильбертовых, различия нивелируются, что снимает напряжение.

Упражнения

- В $\mathbb{R}^n$ сильная сходимость совпадает со слабой.
- Сильная сходимость совпадает со слабой в пространстве l_1 суммируемых последовательностей $\{x_k\}$, $\sum\limits_k^{\infty} |x_k| < \infty$.
- Сильная сходимость влечет за собой слабую.
- Элементы ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве слабо сходятся к нулю, $e_n \xrightarrow{w} 0$, но $\|e_n\| \equiv 1$.
- *Выпуклые* множества в E имеют одно и то же замыкание как в исходной топологии, так и в — слабой.
- Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена (сильно, т. е. по норме). (Муки доказательства помогают оценить *принцип равномерной ограниченности Банаха—Штейнгауза*. См. теорему 6.7.2.)

Случай гильбертова пространства позволяет избежать путаницы между *слабой* и $(*)$*-слабой* сходимостями, но для мешанины в голове хватает наличия сильного (s) и слабого (w) предела. Помимо обычных (сильных) — возникают понятия *слабой замкнутости* и *слабой компактности*, не говоря о различных комбинаторных наслоениях. Например, возникает 4 типа непрерывности, поскольку оператор может переводить слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся, «$w \Rightarrow s$», а также «$s \Rightarrow w$», «$w \Rightarrow w$», «$s \Rightarrow s$». Слава Богу, что принципиально новый момент здесь возникает лишь в связи с «$w \Rightarrow s$» [12], однако неприятностей и так хватает.

- *Замкнутый шар в банаховом пространстве E слабо замкнут* [13].

◄ Факт достаточно простой. Без ограничения общности шар B можно считать единичным. В предположении противного найдется последовательность $\{x_n\} \subset B$, слабо сходящаяся к точке x_0 с нормой $\|x_0\| > 1$. Пусть линейный функционал f имеет норму $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$ (см. следствие из теоремы Хана—Банаха). Тогда $f(x_n) \to f(x_0) > 1$. С другой стороны, $f(x_n) \leqslant \|f\| \cdot \|x_n\| \leqslant 1$ при любом n, что дает противоречие. ►

- *Любое слабо замкнутое множество Ω сильно замкнуто.*

---

[12] Варианты «$s \Rightarrow w$», «$w \Rightarrow w$», «$s \Rightarrow s$» — равносильны (если речь идет о линейных операторах) — определяют обычную непрерывность. (**?**)

Свойство «$w \Rightarrow s$» вытекает из *полной непрерывности* оператора, а ***в гильбертовом пространстве — равносильно полной непрерывности.***

[13] Множество Ω *слабо замкнуто*, если слабый предел каждой слабо сходящейся последовательности элементов из Ω принадлежит Ω.

◀ В предположении противного найдется последовательность $\{x_n\} \subset \Omega$, сильно сходящаяся к $x \notin \Omega$. Но «$x_n \xrightarrow{s} x$» $\Rightarrow$ «$x_n \xrightarrow{w} x$», поэтому, в силу слабой замкнутости Ω, точка x обязана принадлежать Ω. ▶

• На фоне предыдущего несколько парадоксально выглядит *«слабая незамкнутость замкнутой (сильно) единичной сферы»*.

◀ Как уже отмечалось, элементы ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве H слабо сходятся к нулю, $e_n \xrightarrow{w} 0$, но $\|e_n\| \equiv 1$. Это становится прозрачным при разложении любого элемента $x \in H$ в ряд

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

откуда ясно, что *коэффициенты Фурье* $\langle x, e_n \rangle$ образуют квадратично суммируемую последовательность, что влечет за собой $\langle x, e_n \rangle \to 0$ при любом $x \in H$, т.е. $e_n \xrightarrow{w} 0$. ▶

Таким образом, *слабое замыкание единичной сферы в H включает центр сферы*.

• Скалярное произведение $\langle x, y \rangle$, очевидно, непрерывно по совокупности переменных, но не слабо непрерывно. Т. е. из

$$x_n \xrightarrow{w} x, \quad y_n \xrightarrow{w} y,$$

вообще говоря, не следует $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$. Контрпример дает ортогональный базис: $x_n = y_n = e_n$.

Отсюда ясно, что норма не является слабо непрерывной функцией, из-за чего, собственно, слабая сходимость отличается от сильной. Импликацию

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \Rightarrow \quad x_n \xrightarrow{s} x$$

обеспечивает дополнительное требование $\|x_n\| \to \|x\|$. (?)

6.5. Слабая компактность

Множество Ω в банаховом пространстве E называется *слабо компактным*, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset \Omega$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу из Ω.

6.5.1. Теорема[14]. *Замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве слабо компактен*[15].

Роль теоремы 6.5.1 в анализе достаточно очевидна. Без компактности с практическими задачами справиться часто не удается. На первом же шаге, где требуется установить существование решения, — происходит сбой. Теорема *Шаудера*, например, не работает. Теорема же 6.5.1, ослабляя топологию, возвращает ситуацию в «компактное русло». Дело в том, что компактность, слабая или сильная, есть компактность — почти тот же арсенал методов начинает работать. Другое дело, если кого-то не устраивает новая топология, но тут уже задача нематематическая — приходится пересматривать взаимоотношения с реальностью.

В общем случае (нерефлексивного нормированного пространства E) речь может идти о слабой компактности шара в сопряженном пространстве E^*, точнее говоря, о $(*)$-слабой компактности[16], но звездочку $(*)$ мы опускаем, полагаясь на контекст.

Вот более общий результат, из которого вытекает теорема 6.5.1.

6.5.2. Теорема. *Пусть B обозначает единичный шар в сепарабельном нормированном пространстве E. Шар в сопряженном пространстве*

$$B^* = \{f \in E^* : |f(x)| \leqslant 1,\ x \in B\} \tag{6.6}$$

слабо компактен.

В (6.6) шар B можно заменить любой окрестностью нуля Ω. Тогда Ω^* будет *полярой* Ω.

Доказательство получается с помощью следующей часто используемой леммы.

6.5.3. Лемма. *В сепарабельном нормированном пространстве E из ограниченной последовательности функционалов $\{f_n\} \subset E^*$ всегда можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

---

[14] С этим принципиальным результатом и его вариациями связывают имена *Алаоглу*, *Банаха*, *Тихонова* и даже *Бурбаки* — см. [8, 17, 22].

[15] Но единичная сфера в бесконечномерном гильбертовом пространстве не является слабо компактным множеством. (**?**)

[16] Множество $K \subset E^*$ называется $(*)$-*слабо компактным*, если из любой последовательности элементов этого множества можно выделить подпоследовательность, $(*)$-слабо сходящуюся к некоторому элементу множества K.

◄ Пусть $\{x_n\} \subset E$ счетное всюду плотное множество. Из ограниченности по норме последовательности $\{f_n\} \subset E^*$ вытекает ограниченность числовой последовательности $f_1(x_1), \dots, f_n(x_1), \dots$, из которой (поэтому) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $f_1^1(x_1), \dots, f_n^1(x_1), \dots$.

Далее, аналогично, из $\{f_n^1\}$ можно так выбрать подпоследовательность $\{f_n^2\}$, чтобы сходилась последовательность $\{f_n^2(x_2)\}$. И так далее.

Диагональная последовательность $\{f_n^n\}$ по построению такова, что для любого x_k числовая последовательность $\{f_n^n(x_k)\}$ сходится. А поскольку $\{x_k\}$ плотно в E, то $\{f_n^{(n)}(x)\}$ сходится при любом $x \in E$. ►

Упражнения

- *Любое слабо компактное множество ограничено.*
- *Рефлексивное пространство слабо полно.*
- *Ограниченные множества в* $L_p[\overline{\Omega}]$ $(p \geqslant 1)$ *слабо компактны.*

6.6. Идеальная выпуклость

Множество X в банаховом пространстве E называется *идеально выпуклым* [17], если

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \in X$$

для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ и любой числовой последовательности $\{\alpha_n\}$, при условии $\alpha_n \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 1$.

Понятие идеальной выпуклости выглядит «сбоку бантиком», но оно весьма эффективно работает в бесконечномерном случае — см. следующие разделы. Это хороший пример удачного трюка, бесполезного в $\mathbb{R}^n$.

- Линейное подпространство непрерывных функций в L_p выпукло — но не идеально. (?)
- Нуль-пространство (ядро) линейного функционала $f : E \to \mathbb{R}$ идеально выпукло только в случае непрерывности f. (?)

Открытые и замкнутые выпуклые множества $X \subset E$ идеально выпуклы. (?) Пересечение любого числа идеально выпуклых множеств — идеально выпукло. (?) При непрерывном линейном преобразовании образ ограниченного идеально выпуклого множества является идеально выпуклым. (?)

---

[17] Понятие, а также различные конструкции на его основе принадлежат Е. А. Лифшицу — см. [13] либо: *Лифшиц Е. А.* // Функц. анализ и его прил. 1970. **4**. №4. С. 76–77.

Элемент x называется *c-внутренней точкой* $X \subset E$, если по любому $z \in E$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $x + \varepsilon z \in X$.

6.6.1. Лемма. *В случае идеально выпуклого множества* $X \subset E$ *справедливо*[18]:

$$X_i = X_c = (\overline{X})_i = (\overline{X})_c.$$

◄ Авторский вариант доказательства [13] основывается на цепочке включений

$$(\overline{X})_i \subset X_i \subset X_c \subset (\overline{X})_c \subset (\overline{X})_i, \tag{6.7}$$

в которой нетривиальны лишь — крайние.

При доказательстве первого включения достаточно считать $0 \in (\overline{X})_i$, и пусть $B(\varepsilon, 0) \subset \overline{X}$. Тогда

$$B(\varepsilon, 0) \subset X \cap B(\varepsilon, 0) + B(\varepsilon/2, 0),$$

откуда

$$B(\alpha\varepsilon, 0) \subset \alpha[X \cap B(\varepsilon, 0)] + B(\alpha\varepsilon/2, 0) \tag{6.8}$$

при любом $\alpha > 0$.

Пусть теперь $z \in B(\varepsilon/2, 0)$. Из (6.8) вытекает существование таких

$$x_1 \in X \cap B(\varepsilon, 0) \quad \text{и} \quad z_1 \in B(\varepsilon/4, 0),$$

что $z = \dfrac{x_1}{2} + z_1$. Повторяя аналогичный шаг для $z_1 \in B(\varepsilon/4, 0)$ и так далее, получаем последовательности $x_n \in X \cap B(\varepsilon, 0)$ и $z_n \in B\left(\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}, 0\right)$, для которых $z_n = \dfrac{1}{2^{n+1}} x_{n+1} + z_{n+1}$, что влечет за собой[19] $z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2^n} \in X$ (в силу идеальной выпуклости X).

Таким образом, $B(\varepsilon/2, 0) \subset X$, откуда $0 \in X_i$.

Следующие два звена цепочки (6.7) тривиальны, и остается доказать последнее включение, замыкающее круг. Если x c-внутренняя точка $\overline{X}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} n \left\{(\overline{X} - x) \cap (-\overline{X} + x)\right\} = E,$$

а поскольку множества замкнуты, то, в силу теоремы Бэра о категории полного метрического пространства, хотя бы одно из них имеет внутреннюю точку. Следовательно, найдется шар $B(\varepsilon, u) \subset (\overline{X} - x) \cap (-\overline{X} + x)$, т.е.

$$B(\varepsilon, u) + x \subset \overline{X} \quad \text{и} \quad -B(\varepsilon, u) + x \subset \overline{X},$$

[18] Индексы i, c обозначают внутреннюю и c-внутреннюю точку $X \subset E$.

[19] Поскольку $\left\| z - \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{x_n}{2^n} \right\| = \|z_k\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

что, в силу выпуклости X, приводит к

$$\frac{1}{2}\{B(\varepsilon,u)+x\}+\frac{1}{2}\{B(\varepsilon,u)+x\}=B(\varepsilon,x)\subset\overline{X},$$

а это означает, что x — внутренняя точка $\overline{X}$, т. е. $(\overline{X})_c\subset(\overline{X})_i$. ▶

6.7. Принцип равномерной ограниченности

6.7.1. Теорема Банаха—Штейнгауза. *Если семейство линейных операторов*

$$A_\lambda : E_1 \to E_2 \qquad (\lambda\in\Lambda)$$

равномерно по λ ограничено в каждой точке[20] $x\in E_1$, *то нормы $\|A_\lambda\|$ ограничены в совокупности, т. е. $\|A_\lambda\|<\beta<\infty$ $(\lambda\in\Lambda)$.*

◀ Множества $X_\lambda=\{x:\|A_\lambda x\|\leqslant 1\}$ идеально выпуклы, поскольку выпуклы и замкнуты. Поэтому $X=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ также идеально выпукло; причем 0 — его c-внутренняя точка, принадлежащая X вместе с некоторой шаровой окрестностью $B(\varepsilon,0)$ (лемма 6.6.1). Шар $B(\varepsilon,0)\subset X_\lambda$ при любом $\lambda\in\Lambda$, откуда $\|A_\lambda\|\leqslant\varepsilon^{-1}$ у всех операторов A_λ. ▶

Из теоремы 6.7.1 сразу вытекает, например, следующий результат.

6.7.2. Теорема. *Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена (сильно, т. е. по норме).*

Теорема 6.7.1 чаще всего применяется в ситуации, когда семейство операторов представляет собой *поточечно сходящуюся* последовательность операторов. Остановимся предварительно на терминологии.

Сходимость операторов. *Сходимость $A_n\to A$ по норме,*

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|=0,$$

линейных ограниченных операторов $A_n\to A$ называют также *равномерной*, поскольку она равносильна $\|A_nx-Ax\|\to 0$ равномерно по x из любого шара $\|x\|\leqslant r$.

---

[20] Т. е. $\|A_\lambda x\|<\alpha(x)<\infty$ $(\lambda\in\Lambda)$.

В случае $\|A_n x - Ax\| \to 0$ при любом $x \in E_1$ сходимость $A_n \to A$ называют *сильной*[21].

Равномерная сходимость влечет за собой сильную, но обратное, вообще говоря, неверно[22].

Пример

◄ Пусть $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Пусть H_n — подпространство, натянутое на элементы $e_1, \ldots, e_n$, а P_n — *проектор* H на H_n. Для любого $x \in H$

$$P_n x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \to \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j = x.$$

Следовательно, P_n сильно (поточечно) сходится к тождественному оператору I.

Но

$$\|P_n - I\| \geqslant \|P_n e_{n+1} - e_{n+1}\| = \|e_{n+1}\| = 1.$$

Поэтому P_n не сходится равномерно к I. ►

Из теоремы 6.7.1 вытекает справедливость следующего утверждения, которое также называют теоремой *Банаха—Штейнгауза.*

6.7.3. *Если последовательность линейных ограниченных операторов A_n сильно (поточечно) сходится к оператору A, то последовательность норм $\{\|A_n\|\}$ этих операторов ограничена. Предельный оператор A также ограничен и линеен.*

6.8. Принцип открытости отображения

6.8.1. Теорема. *При непрерывном линейном отображении одного банахова пространства **на** другое, $A : E_1 \to E_2$, образ $A\Omega$ любого открытого множества Ω — открыт.*

◄ Пусть $x \in \Omega$ и $B(\varepsilon, x) \subset \Omega$. Множество $AB(\varepsilon, x)$ идеально выпукло вместе с $B(\varepsilon, x)$. Очевидно,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(n\varepsilon, x) \supset E_1 \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} AB(n\varepsilon, x) \supset E_2.$$

---

[21] Термин принят, но неудачен, поскольку равномерная сходимость оказывается все же «сильнее». Точнее был бы термин *поточечная сходимость.*

[22] В $\mathbb{R}^n$ верно. (?)

Поэтому Ax ε-внутренняя точка $AB(\varepsilon, x)$, но тогда, по лемме 6.6.1, Ax — внутренняя точка $AB(\varepsilon, x) \subset A\Omega$. ►

Элементарным следствием только что установленного результата является *теорема Банаха об обратном операторе*:

6.8.2. Теорема. *Если непрерывный линейный оператор A взаимно однозначно отображает одно банахово пространство **на** другое, то обратный оператор*[23] A^{-1} *непрерывен.*

Интегральное *преобразование Гильберта*

$$Gx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{t-s}\, ds,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, несмотря на сингулярную особенность ядра, — действует из $L_p(-\infty, \infty)$ в $L_p(-\infty, \infty)$ при любом $p \in (0, \infty)$. При этом имеют место формулы обращения:

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{t-s}\, ds \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(s)}{t-s}\, ds.$$

По теореме 6.8.2 обратный оператор G^{-1} непрерывен.

6.9. Замкнутые операторы

Линейный оператор A называется *замкнутым*, если из $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует $x \in D_A$ и $Ax = y$.

Даже на трезвую голову замкнутость не всегда удается отличить от непрерывности, хотя понятия, вообще говоря, разные.

Легко убедиться, что замкнутость оператора $A : E_1 \to E_2$ равносильна замкнутости *графика* $G(A)$: множества пар элементов $u = \{x, Ax\}$ в декартовом произведении $E_1 \times E_2$ с нормой $\|u\| = \|x\| + \|Ax\|$.

Понятие замкнутости иногда способно в какой-то мере восполнить недостающую непрерывность.

Оператор дифференцирования, действующий из $\mathrm{D}_A \subset C[0, 1]$ в $C[0, 1]$, замкнут (**?**), но не ограничен (не непрерывен). Ограниченный (непрерывный) оператор $A : \mathrm{D}_A \to E_2$ всегда замкнут. (**?**)

[23] Обратный линейному оператору — также линеен. (**?**)

6.9.1. Теорема о замкнутом графике. *Если* $\mathrm{D}_A = E_1$ *и линейный оператор* $A : E_1 \to E_2$ *замкнут, то* A *ограничен (непрерывен).*

◄ График $G(A)$ оператора A — банахово пространство, а $B : E_1 \to G(A)$ ($Bx = \{x, Ax\}$) — взаимно однозначное линейное отображение «на» в обе стороны. Поэтому оба оператора B и B^{-1} — по теореме 6.8.2 — непрерывны. А значит, непрерывен и оператор A. ►

Если оператор определен на всем (банаховом) пространстве, то замкнутость и ограниченность — равносильны.

• Непрерывное возмущение не нарушает замкнутости. Точнее, *если* A *замкнут, а* G *непрерывен, причем* $\mathrm{D}_A \subset \mathrm{D}_G$, *то* $A + G$ *замкнут.* (?)

Замыкание оператора. Говорят, что незамкнутый оператор A допускает *замыкание* $\bar{A}$, если его можно расширить до замкнутого оператора по правилу:

$$x_n \in \mathrm{D}_A,\ x_n \to x,\ Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad \bar{A}x = y.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы[24)]

$$x_n \to 0,\ Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Решения уравнения $\bar{A}x = y$ называют *обобщенными решениями* уравнения $Ax = y$. Замыкание оператора дифференцирования в L_2 называют *оператором обобщенного дифференцирования.*

Простой пример незамыкаемого оператора дает $Ax = x'(0)$, который на непрерывно дифференцируемых функциях не допускает замыкания как функционал на $C[0, 1]$. Действительно, $x_n = \dfrac{1}{n}\sin nt \to 0$ равномерно на $[0, 1]$, но $Ax_n = x_n'(0) = 1$.

6.10. Обратные операторы

Если оператор $A : E \to E$ взаимно однозначно отображает E на E, т. е. инъективен и сюръективен, это значит, что уравнение $Ax = y$

---

24) Эквивалентно: *оператор допускает замыкание, если замыкание его графика — есть график* (однозначного преобразования — а не многозначного).

при любом y имеет единственное решение $x = A^{-1}y$, где A^{-1} обозначает *обратный оператор.*

Подстановка $x = A^{-1}y$ в $Ax = y$ дает $AA^{-1}y = y$, а подстановка $y = Ax$ в $x = A^{-1}y$ приводит к $x = A^{-1}Ax$. Таким образом,

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I.}$$

Иными словами, произведение оператора на свой обратный (в любом порядке[25]) есть тождественное преобразование I. Следовательно, левый и правый обратный оператор автоматически совпадают[26].

Теорема Банаха об обратном операторе (теорема 6.8.2) имеет больше эстетическое значение. На практике чаще работает следующий простой результат.

6.10.1. Теорема. *Пусть линейное сюръективное отображение*[27] $A : E_1 \to E_2$ *удовлетворяет условию*

$$\|Ax\| \geqslant m\|x\|, \quad m > 0. \tag{6.9}$$

Тогда существует обратный линейный непрерывный оператор $A^{-1} : E_2 \to E_1$.

◄ Если $Ax_1 = y$, $Ax_2 = y$, то $A(x_1 - x_2) = 0$, откуда, с учетом (6.9),

$$m\|x_1 - x_2\| \leqslant \|A(x_1 - x_2)\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2,$$

что влечет за собой существование обратного оператора A^{-1}, ограниченность которого вытекает из (6.9). ►

• Для обратимости A условие (6.9) не только достаточно, но и необходимо. (?) В данном контексте очевиден следующий результат.

6.10.2. Теорема. *Если оператор A имеет непрерывный обратный, то и $A + \Delta A$, при условии достаточной малости ΔA по норме, — непрерывно обратим.*

[25] Даже без предположения о линейности.

[26] Если $A : E_1 \to E_2$, то $A^{-1}A$ — тождественное преобразование в E_1, а AA^{-1} — в E_2. В этом смысле левый обратный оператор и правый — отличаются.

[27] Т. е. отображение «на».

• Если $A : E \to E$ и $\|A\| < 1$, то

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n, \qquad \|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A\|}. \quad (?)$$

6.11. Вполне непрерывные операторы

Линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ называется ***вполне непрерывным***, либо ***компактным***, если он отображает ограниченные множества E_1 в предкомпактные множества E_2. ***Вполне непрерывный оператор всегда непрерывен, поскольку ограничен.***

• Оператор

$$Gx = \int_{\Omega} G(t, s)x(s)\, ds \tag{6.10}$$

в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывного ядра $G(t, s)$ вполне непрерывен в $C(\overline{\Omega})$.

◄ Ограниченность оператора G очевидна. Равностепенная непрерывность функций $y(t) = Gx(t)$ при условии ограниченности $\|x(t)\| \leqslant r$ следует из

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leqslant \int_{\Omega} |G(t_1, s) - G(t_2, s)| \cdot |x(s)|\, ds \leqslant r \max_s |G(t_1, s) - G(t_2, s)|,$$

в силу равномерной непрерывности $G(t, s)$. Далее остается сослаться на *теорему Арцела*. ►

• Оператор (6.10) в случае

$$\int_0^1 \int_0^1 |G(t, s)|^q\, dt\, ds < \infty$$

вполне непрерывен как оператор из L_p в L_p $(1/p + 1/q = 1)$. (?)

• Оператор A, действующий в l_2 по правилу $y_j = [Ax]_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k$, — вполне непрерывен, если $\sum_{j,k=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 < \infty$. (?)

Компактные операторы по своим свойствам близки к конечномерным.

6.11.1. Теорема. *Вполне непрерывный оператор $A : E \to E$, где E банахово пространство с базисом*[28]*, по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ может быть представлен суммой $A = A_1 + A_2$, где A_1 — конечномерный оператор*[29]*, а A_2 имеет норму, меньшую $\varepsilon > 0$.*

◄ Результат устанавливается на основе двух соображений. С одной стороны, образ $K = AB$ единичного шара B — компактен, и у него по теореме 4.1.3 существует конечная ε-сеть из точек $y_j = Ax_j$. С другой стороны, точки $y_j = Ax_j$ могут быть приближены сколь угодно точно конечными суммами $y_j = \sum_{k=1}^{N} \xi_{jk} e_k$, поскольку из сходимости рядов $y_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{jk} e_k$ следует, что их хвосты стремятся к нулю. ►

Упражнения

- *Если линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне непрерывен, а $B : E_1 \to E_2$ — линейный ограниченный оператор, и область значений $\mathbf{R}(B) \subset \mathbf{R}(A)$, то B — также вполне непрерывен.* Иными словами, задача «сломать» полную непрерывность оператора A, не выходя за пределы области значений и сохраняя ограниченность, — обречена на провал.
- *Если последовательность $\{A_n\}$ вполне непрерывных операторов равномерно*[30] *сходится к A, то A — также вполне непрерывен.*
- *Любой ограниченный линейный функционал вполне непрерывен.*
- *Вполне непрерывный оператор A переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.* (Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена (теорема 6.7.2), поэтому $\{Ax_n\}$ — компактна.)
- *Произведение вполне непрерывного оператора на ограниченный (неважно, слева или справа) — вполне непрерывно.*

Из-за путаницы в терминологии[31] вполне непрерывным часто называют оператор, переводящий ограниченные множества в компактные (а не предкомпактные). То ли в результате этой неразберихи, то ли по более глубоким причинам — большинство студентов считает, что уж замкнутые ограниченные множества

---

[28] Последовательность $\{e_n\} \subset E$ называют *базисом* E, если любой элемент $x \in E$ однозначно представляется в виде $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$.

[29] Все образы $A_1 x$ принадлежат конечномерному пространству $E_n \subset E$.

[30] Т. е. по норме.

[31] См. замечание в разделе 4.1.

вполне непрерывный оператор переводит именно в компактные. Это неправильно.

Поскольку *любой непрерывный линейный функционал вполне непрерывен*, таковым является и

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$$

в $C[0,1]$. Замкнутое множество функций $M = \{x : \|x\| = 1,\ x(t) \geqslant 0\}$ функционал f переводит в полуинтервал $(0,1]$.

Преобразование замкнутых множеств в незамкнутые для вполне непрерывных операторов является, скорее, правилом, нежели исключением.

6.11.2. Теорема. *Если область значений вполне непрерывного оператора A замкнута, — оператор A конечномерный.*

◄ Замкнутая область значений $\mathbf{R}_A$ является банаховым, а значит, полным метрическим пространством. С другой стороны,

$$\mathbf{R}_A = \bigcup_{n=1}^{\infty} AB_n,$$

где B_n — шары радиуса $r = n$, т.е. множества $\|x\| \leqslant n$. В предположении бесконечномерности $\mathbf{R}_A$ компакты AB_n нигде не плотны в $\mathbf{R}_A$ (теорема 5.4.1), но $\mathbf{R}_A$ является их счетным объединением, что противоречит теореме Бэра о категории (теорема 2.5.1). ►

Вот еще один принципиальный (для изучения линейных уравнений, глава 9) результат.

6.11.3. Теорема. *Пусть оператор A — вполне непрерывен и уравнение $(I - A)x = 0$ не имеет ненулевых решений. Тогда область значений $\mathbf{R}_{(I-A)}$ — замкнута (является подпространством E).*

◄ Допустим, $(I - A)x_n \to y$. Покажем, что $y \in \mathbf{R}_{(I-A)}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то $\{Ax_n\}$ — компактна, и потому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{Ax_k\} \to z$. Тогда

$$x_k = (I - A)x_k + Ax_k \to y + z,$$

что под действием оператора A переходит в $Ax_k \to A(y + z)$, влекущее за собой $z = Ay + Az$, откуда

$$y = (I - A)(y + z) \in \mathbf{R}_{(I-A)}.$$

Остается показать, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. В противном случае можно считать $\|x_n\| \to \infty$ (либо перейти к подпоследовательности).

Поделив $(I - A)x_n \to y$ на $\|x_n\|$, получим $(I - A)x_n' \to 0$, где x_n' обозначает $x_n/\|x_n\|$. Повторяя предыдущее рассуждение для данного случая ($y = 0$), получим $z = Az$, $z \neq 0$, что противоречит предположению теоремы. ►

6.11.4. Теорема. *Оператор* A^*, *сопряженный вполне непрерывному* $A : E \to E$, *— вполне непрерывен*[32].

◄ Пусть Ω и Ω^* — единичные шары в E и E^*. Доказательство легко получается при концентрации внимания на определении сопряженного оператора:

$$\langle f, Ax \rangle = \langle A^* f, x \rangle. \tag{6.11}$$

Если рассмотреть функционалы $f \in \Omega^*$ с зауженной областью определения $\overline{A\Omega}$, которая компактна, то множество таких функционалов по аналогу теоремы Арцела тоже будет компактно. А множество $A^*\Omega^*$ функционалов $\langle g, x \rangle = \langle A^* f, x \rangle$ с зауженной областью определения $\overline{\Omega}$ ввиду (6.11) — изометрично предыдущему, и потому тоже компактно. ►

6.12. Проекторы

Примитивная вроде бы идеология проектирования в $\mathbb{R}^n$ обретает некоторую таинственность в функциональных пространствах.

Операторам проектирования (*проекторам*) P, характеризуемым условием $P^2 = P$, соответствует разложение пространства в прямую сумму

$$E = X \oplus Y, \quad X = PE, \quad Y = (I - P)E,$$

где X, Y — линейные подпространства, замкнутые как нуль-пространства проекторов, соответственно, $I - P$ и P. Оператор $I - P$ является проектором одновременно с P.

В свою очередь, разложение $E = X \oplus Y$ определяет проектор P на X параллельно[33] Y.

Интуитивно довольно неожиданно, что у замкнутого подпространства $X \subset E$ дополнение Y в смысле $E = X \oplus Y$ не обязано

[32] Результат сохраняет силу в общей ситуации вполне непрерывного оператора $A : E_1 \to E_2$.

[33] Вектор x называется *проекцией* вектора z на X параллельно Y, если $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$.

существовать [7, 17]. В гильбертовых пространствах такие аномалии исключены (раздел 7.1).

Если P проектор в E, то P^* — проектор в E^*. (?)

$$\mathbf{R}_P + \ker P = E, \quad \mathbf{R}_P = \ker(I - P). \quad (?)$$

6.13. Дополнение

• *Базис* $\{e_n\}$ в E определяется как система векторов, с помощью которой любой элемент $x \in E$ представи́м сходящимся рядом

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k. \tag{6.12}$$

Базис может существовать только в сепарабельном пространстве, но неясно, всегда ли существует (*проблема Шаудера*). В стандартных ситуациях базисы известны.

Проблематике сопутствует некоторая тонкость, связанная с необходимостью различия понятий базиса и полной системы (в банаховом, но не гильбертовом пространстве). *Система векторов* $\{e_n\}$ считается *полной* в E, если ее линейная оболочка всюду плотна в E. Уже из определения ясно, что полная система не обязана быть базисом. Причем существуют такие полные системы, которые нельзя дополнить до базиса, не нарушая требования, чтобы ни один элемент из $\{e_n\}$ не принадлежал замкнутой линейной оболочке остальных.

Стандартная система $\{1, \sin kx, \cos kx\}$ полна в $C[0, 2\pi]$, но не образует базиса[34]. Она образует базис в L_2.

• Классическая *система Хаара* состоит из *функций Хаара* $\chi_n^j(t)$, определяемых для $t \in [0, 1]$ следующим образом.

При каждом $n = 0, 1, \ldots$ и любом целом j от 1 до 2^n функция $\chi_n^j(t)$ полагается равной нулю вне сегмента

$$\Delta_j = \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right],$$

который делится пополам, и на левой половине Δ_j функция $\chi_n^j(t) = 2^{n/2}$, а на правой — $\chi_n^j(t) = -2^{n/2}$. В середине Δ_j значение $\chi_n^j(t)$ не принципиально — например, равно нулю.

Система Хаара ортонормальна в L_2 и является базисом в L_p при любом $p \geqslant 1$. Ряд Фурье любой непрерывной функции $\varphi(t)$ по этой системе сходится к $\varphi(t)$ равномерно. Получается нечто вроде двоичной системы счисления для записи функций.

---

[34] Функции из $C[0, 2\pi]$, не удовлетворяющие условию $x(0) = x(2\pi)$, не представимы в виде (6.12).

При необходимости организовать одноиндексную нумерацию — функции $\chi_n^j(t)$ могут быть расположены в порядке возрастания n, а при одинаковом n — в порядке возрастания j.

• **Операторы вложения.** Говорят, что пространство E_0 вложено в E_1, если каждый элемент из E_0 является элементом пространства E_1. Тождественный оператор, действующий из E_0 в E_1 и ставящий в соответствие элементу $x \in E_0$ тот же элемент как элемент пространства E_1, называется *оператором вложения*. Если оператор вложения непрерывен (вполне непрерывен), говорят о непрерывном (компактном) вложении E_0 в E_1.

• Ненулевой линейный оператор, действующий из L_p в $L_{p'}$, где $p' < p$, не может быть непрерывным. (**?**)

Глава 7

Операторы в гильбертовых пространствах

Многие неприятности в гильбертовы пространства не помещаются. Поэтому при первоначальном изучении функционального анализа результаты имеет смысл «примерять» на L_2, избегая сложностей. По аналогичной причине в главе рассматриваются только сепарабельные пространства.

Банахово пространство $L_2[a,b]$ формально вводилось с помощью нормы. Оно становится гильбертовым при задании скалярного произведения

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

Стандартные примеры гильбертовых пространств: l_2, L_2, $L_{2\mu}$, W_2^l. Еще один пример: пространство функций $x(t)$ измеримых на $(-\infty,\infty)$, ограниченных в смысле

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt < \infty,$$

и со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

7.1. Преамбула

Естественный вопрос, который возникает в связи с рассмотрением гильбертовых пространств, — каковы дополнительные выгоды по сравнению с «банаховым случаем»? Главное, безусловно, заключается в возможности ортогональных разложений (ряды Фурье, ортогональные наборы собственных функций). Но это уже «выставочные» экспонаты, путь к которым пролегает через внутреннюю кухню, представляющую интерес и по другим причинам.

Например, достаточно принципиален вопрос существования и единственности в рассматриваемом пространстве элемента y, обеспечивающего минимум расстояния от x до *замкнутого* подпространства (или выпуклого множества) L:

$$\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

7.1.1. Теорема. *В непустом замкнутом выпуклом подмножестве L* ***гильбертова*** *пространства H существует* ***единственный*** *элемент $u \in L$, ближайший к $x \notin L$, т. е. $\rho(x, L) = \|x - u\|$.*

◄ Пусть $x \in H$ и $\|x_n - x\| \to \rho(x, L) = r$. В силу *равенства параллелограмма*

$$\left\|\frac{1}{2}(x_j + x_k) - x\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(x_j - x_k)\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x_j - x\|^2 + \frac{1}{2}\|x_k - x\|^2.$$

Правая часть при $j, k \to \infty$ сходится к r^2, а первое слагаемое в левой — не меньше r^2, поскольку $\frac{1}{2}(x_j + x_k) \in L$. Поэтому $\{x_n\}$ фундаментальна, откуда $x_n \to u$, причем $u \in L$ в силу замкнутости L, и $\|x - u\| = r$.

Другой такой точки $u' \neq u$ существовать не может, ибо в силу (2.6)

$$4r^2 = 2(x - u)^2 + 2(x - u')^2 = (u - u')^2 + 4\left(x - \frac{u + u'}{2}\right)^2 \geqslant (u - u')^2 + 4r^2,$$

откуда $u = u'$. ►

7.1.2. Теорема. *Любое замкнутое подпространство $L \subset H$ имеет ортогональное дополнение $L^\perp = \{x : \langle x, z\rangle = 0,\ z \in L\}$,*

$$H = L \oplus L^\perp,$$

причем подпространство $L^\perp \subset H$ — замкнуто[1].

◄ Пусть u в L ближайшая к x точка (теорема 7.1.1). Тогда функция

$$\varphi(\tau) = (x - u + \tau h)^2, \quad h \in L,$$

достигает минимума при $\tau = 0$. Поэтому $\varphi'(0) = 2\langle x' - u, h\rangle = 0$ при любом $h \in L$, что означает ортогональность элемента $v = x - u$ и L. В результате любой элемент x единственным образом представи́м в виде $x = u + v$, где $u \in L$, $v \in L^\perp$. Замкнутость $L^\perp$ вытекает из непрерывности скалярного произведения. ►

7.1.3. Теорема. *Всякий линейный функционал $f \in H^*$ представи́м скалярным произведением* $\boxed{f(x) = \langle g, x\rangle}$.

[1] Формулировка опирается на принцип «кашу маслом не испортишь». Дело в том, что здесь имеется определенная нечеткость понятий. Обычно в банаховых пространствах требование замкнутости включается в определение подпространства. Но иногда подпространствами называют просто линейные многообразия.

◄ Случай $\ker f = H$ тривиален ($g = 0$). Пусть $L = \ker f \neq H$. По предыдущей теореме $H = L \oplus L^{\perp}$. Покажем, что $L^{\perp}$ одномерно.

Пусть ненулевой вектор $g_0 \in L^{\perp}$. Допустим, в $L^{\perp}$ существует другой неколлинеарный вектор $g_1 \neq g_0$. Но это ведет к противоречию, поскольку $u = g_1 - \dfrac{f(g_1)}{f(g_0)}g_0 = 0$ в силу $f(u) = 0$. Поэтому базис $L^{\perp}$ состоит из одного элемента g_0.

Полагая $g = \dfrac{f(g_0)}{\langle g_0, g_0\rangle}g_0$, имеем совпадение f с $\langle g, x\rangle$ на L и $L^{\perp}$. ►

Очевидно, верно и обратное: для любого $g \in H$ формула $f(x) = \langle g, x\rangle$ определяет линейный функционал $f \in H^*$. Тем самым определяется изоморфизм между H и H^*. По этой причине удобно считать, что H и H^* совпадают.

7.1.4. Теорема. *Пространство H слабо полно.*

◄ Слабо сходящаяся (в себе) последовательность $\{x_n\}$ ограничена (теорема 6.7.2), поэтому $\lim\langle x_n, z\rangle = f(z)$ определяет ограниченный линейный функционал, который (теорема 7.1.3) обязан иметь вид $f(z) = \langle x, z\rangle$, откуда $x_n \xrightarrow{w} x \in H$. ►

Упражнения

- *В гильбертовом пространстве слабо сходящаяся в себе последовательность слабо сходится к некоторому пределу*[2].
- *Из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset H$ всегда можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность..*

7.2. Ортонормированный базис

Система векторов $\{e_n\} \subset H$ называется *ортонормированной*, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$.

Последовательность $\{e_n\}$ линейно независимых векторов можно превратить в ортонормированную $\{h_n\}$ с помощью *процесса ортогонализации Шмидта*:

◄ На первом шаге полагается $h_1 = e_1$ и $f_1 = \dfrac{h_1}{\langle h_1, h_1\rangle^{1/2}}$. На втором — строится вектор $h_2 = e_2 - \langle e_2, f_1\rangle f_1$, *ортогональный* f_1, и опять происходит *нормировка*: $f_2 = \dfrac{h_2}{\langle h_2, h_2\rangle^{1/2}}$. На k-м шаге строится вектор

$$h_k = e_k - \langle e_k, f_{k-1}\rangle f_{k-1} - \ldots - \langle e_k, f_1\rangle f_1,$$

[2] Это, собственно, и есть теорема 7.1.4.

ортогональный всем $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$, после чего *нормируется*, $f_k = \dfrac{h_k}{\langle h_k, h_k\rangle^{1/2}}$. И так далее. ►

Числа

$$\xi_j = \langle x, e_j\rangle$$

называют *координатами* $x \in H$ относительно ортонормированной системы $\{e_n\}$.

Пусть L — линейная оболочка конечной системы $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда вектор $x' = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ принадлежит L, а $x - x' \in L^\perp$, в силу $\langle x', x - x'\rangle = 0$. Поэтому

$$x^2 = (x')^2 + (x - x')^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle^2 + (x - x')^2,$$

откуда $\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$, что при $n \to \infty$ переходит в *неравенство Бесселя*

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle^2 \leqslant \|x\|^2.}$$

Ортогональная система $\{e_n\} \subset H$ называется *полной*, если пространство, порождаемое этой системой, совпадает с H. Необходимым и достаточным условием полноты является отсутствие элемента $u \in H$, ортогонального всем e_n, что превращает неравенство Бесселя в *равенство Парсеваля*:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle^2 = \|x\|^2.}$$

В случае полной системы частичные суммы $x'_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ сходятся к $x \in H$ (по норме), что приводит к разложению любого элемента x в *ряд Фурье*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Полная ортогональная система является *ортогональным базисом* гильбертова пространства.

В сепарабельном гильбертовом пространстве полная ортогональная система всегда может быть построена с помощью процесса ортогонализации Шмидта из любой плотной в H последовательности.

7.3. Ортогональные ряды

В приложениях — из гильбертовых пространств наиболее употребительно $L_2[a, b]$. Система функций в L_2

$$\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots\} \tag{7.1}$$

ортогональна, если

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)\, dt = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \tag{7.2}$$

и *ортонормальна*, если дополнительно

$$\|\varphi_n\| = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle^{1/2} = \left(\int_a^b \varphi_n^2(t)\, dt \right)^{1/2} = 1. \tag{7.3}$$

• *В случае ортонормальной системы* (7.1) умножение

$$f(t) = c_0\varphi_0(t) + c_1\varphi_1(t) + \ldots + c_n\varphi_n(t) + \ldots, \tag{7.4}$$

на $\varphi_n(t)$ и интегрирование от a до b — приводит к

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_a^b \varphi_k(t)\varphi_n(t)\, dt,$$

что с учетом (7.2) и (7.3) дает *коэффициенты Фурье*

$$c_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)\, dt. \tag{7.5}$$

Для законности этого трюка необходима сходимость ряда (7.4) к $f(t)$, для чего требуется полнота системы $\{\varphi_n\}$ (см. далее).

• Коэффициенты c_n, обеспечивающие минимум

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\right]^2 dx \to \min, \tag{7.6}$$

определяются формулой (7.5). (**?**)

• Широко известна базовая в теории *рядов Фурье* тригонометрическая система

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx, \quad \dots, \tag{7.7}$$

ортогональная[3] на любом промежутке длины 2π. Нормирование (7.7) дает *ортонормальную* систему:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots .$$

• Ортогонализация совокупности степеней $\{1, t, t^2, \dots\}$ в $L_2[-1, 1]$ приводит к *полиномам Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

а в $L_{2\rho}[-1, 1]$ с весом $\rho(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ — к *полиномам Чебышева*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Ортогонализация той же совокупности степеней на $(-\infty, \infty)$ с весовой функцией $\rho(t) = e^{-t^2}$ ведет к *полиномам Эрмита*, а в $L_{2\rho}[0, \infty]$ с весом $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, — к *полиномам Лагерра*.

Центральный вопрос в разложении функций по той или иной ортогональной системе $\{\varphi_n\}$ — это, конечно, *полнота системы* $\{\varphi_n\}$. Общие критерии предыдущего раздела проверяются на основе аппроксимационных теорем.

7.3.1. Теорема Вейерштрасса. *Для непрерывной на* $[a, b]$ *функции* $f(t)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *всегда можно указать такой полином* $P_n(t)$, *что*

$$|f(t) - P_n(t)| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad t \in [a, b]. \tag{7.8}$$

[3] Условие (7.2) легко проверяется.

Проще говоря, любую функцию $f(t)$ можно сколь угодно точно *равномерно* аппроксимировать полиномом. Результат, очевидно, сохраняется для случая

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k Q_k(x),$$

где Q_k, например, *полиномы Лежандра*. В совокупности с тем фактом, что частичные суммы

$$\sum_{k=0}^{n} c_k Q_k(x)$$

с коэффициентами Фурье обеспечивают наилучшую аппроксимацию $f(t)$ в смысле (7.6), это гарантирует равномерную сходимость ряда (7.4) к непрерывной функции $f(t)$. А поскольку множество непрерывных функций плотно в L_2, то и — к любой $f(t) \in L_2$ по норме L_2, — что устанавливает *полноту системы* $\{\varphi_n\}$.

Существует целый ряд родственных теореме 7.3.1 результатов. То же самое имеет место, например, для функций из L_2 с заменой неравенства (7.8) на $\|f(t) - P_n(t)\|_{L_2} < \varepsilon$[4]. Поэтому система $\{1, x, x^2, \dots\}$ — полна в L_2, равно как любая ее ортогонализация.

Аналогичный результат справедлив и для тригонометрических полиномов, что в итоге устанавливает полноту систем типа (7.7).

Доказательство теоремы 7.3.1. Равномерную аппроксимацию $f(t)$ на $[0, 1]$ (при $n \to \infty$) обеспечивают, например, *полиномы Бернштейна*:

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

Бернштейну принадлежит остроумное обоснование этого факта на базе закона больших чисел из теории вероятностей. ◄ В силу непрерывности, $f(t) < M < \infty$. По той же причине для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$, как только $|t - s| < \delta$. При любом $t \in [0, 1]$

$$|f(t) - B_n(t)| \leqslant \sum\nolimits_1 \varphi(k) + \sum\nolimits_2 \varphi(k),$$

$$\varphi(k) = \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k t^k (1-t)^{n-k},$$

[4] Факт очевиден в контексте *теоремы Лузина*.

где первая сумма идет по k, для которых $\left|\frac{k}{n}-t\right| \leqslant \delta$, а суммирование в $\sum_2$ — по $\left|\frac{k}{n}-t\right| > \delta$. Ясно, что первая сумма меньше ε, вторая — меньше[5]

$$2M\sum\nolimits_2 \varphi(k) = 2M\mathrm{P}\left\{\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-t\right| > \delta\right\}.$$

Закон больших чисел для этой величины дает оценку сверху[6] $\dfrac{M}{2n\delta^2}$. В результате $|f(t)-B_n(t)| \to 0$ при $n\to\infty$ равномерно по t. ►

7.4. Сопряженные операторы

Напомним определение. Если A — линейный оператор, то $f(Ax) = \langle f, Ax\rangle$ — есть некоторый линейный функционал $g(x) = \langle g, x\rangle$. *Сопряженный оператор* A^* определяется условием $g = A^*f$, т. е.

$$\langle f, Ax\rangle = \langle A^*f, x\rangle.$$

Иными словами, если функционал $f(x)$ меняется на $f(Ax)$ в связи с воздействием на x линейного преобразования A, то A^* позволяет достичь того же результата, не трогая x, а воздействуя на функционал: $f \Rightarrow A^*f$.

В случае матриц A^* получается из A транспонированием с последующей заменой элементов на комплексно сопряженные.

Специфика гильбертова пространства в части определения сказывается лишь в том, что $\langle f, x\rangle$ означает скалярное произведение. Существенно также $H^* = H$, что x и f уравнивает в правах, позволяя в большинстве ситуаций считать их элементами одного пространства[7].

Легко проверяются свойства

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*, \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*, \quad \|A^*\| = \|A\|.$$

Самосопряженный (или *эрмитов*) оператор A определяется равенством $\boxed{A^* = A}$.

[5] Здесь $X_j = 1$ с вероятностью t и $X_j = 0$ с вероятностью $1-t$.

[6] См.: *Босс В.* Лекции по математике: Вероятность, информация, статистика. Т. 4. М.: УРСС, 2005.

[7] До тех пор, пока речь не заходит о преобразовании переменных — см. [3, т. 3].

Интегральный оператор (6.10) в L_2 с ядром $G(t, s)$ самосопряжен при условии

$$\overline{G(t, s)} = G(t, s),$$

что в вещественном случае сводится к симметричности ядра.

Сумма $A+B$ самосопряженных операторов — самосопряжена, но AB — необязательно[8] (необходима и достаточна коммутативность сомножителей).

Уточнение. Выше предполагалось, что областью определения самосопряженного оператора служит все пространство H. Более общее определение самосопряженного оператора:

$$\mathbf{D}_{A^*} = \mathbf{D}_A \quad \text{и} \quad Ax = A^*x \quad \text{на} \quad \mathbf{D}_A.$$

В случае $\mathbf{D}_A \subset \mathbf{D}_{A^*}$ и опять таки $Ax = A^*x$ на $\mathbf{D}_A$ оператор A называют *симметричным*.

Билинейные и квадратичные формы. Функционал от двух переменных $\langle Ax, y\rangle$, где A — самосопряженный оператор, называют *билинейной*, а $\langle Ax, x\rangle$ — *квадратичной формой.*

Ситуация не сильно отличается от теории квадратичных форм в $\mathbb{R}^n$. Мера сказанного выясняется при изучении спектральных свойств (глава 10).

Полезным инструментом является следующий малопривлекательный с виду результат.

7.4.1. Лемма. *Если линейный самосопряженный оператор A вполне непрерывен и $x_n \xrightarrow{w} x$, то*

$$\langle Ax_n, x_n\rangle \to \langle Ax, x\rangle.$$

◄ Очевидно,

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \langle Ax, x\rangle| \leqslant |\langle Ax_n, x_n\rangle - \langle Ax, x_n\rangle| + |\langle Ax, x_n\rangle - \langle Ax, x\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|A(x_n - x)\| \cdot \|x_n\| \to 0,$$

в силу ограниченности $\{x_n\}$ (теорема 6.7.2) и $\|A(x_n - x)\| \to 0$, что вытекает из компактности A. ►

---

[8] Произведение симметричных матриц не обязано быть симметричной матрицей.

Лемма 7.4.1 выручает в ситуациях, когда необходимо установить, что некоторый функционал достигает своего экстремума.

7.4.2. Теорема. *Квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ с самосопряженным компактным оператором A на единичной сфере достигает своего максимума и минимума.*

◄ Пусть

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to \sup_{\|x\|=1} \{|\langle Ax, x\rangle|\} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку единичный шар в H слабо компактен, из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому z. Подключение леммы 7.4.1 дает

$$|\langle Az, z\rangle| = \sup_{\|x\|=1} \{|\langle Ax, x\rangle|\}. \quad ►$$

Унитарные операторы. Преобразование S называют *унитарным*, если оно не меняет длину векторов (норму),

$$\langle x, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle = \langle x, S^*Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle,$$

откуда $S^*S = S^*S = I$, что означает $\boxed{S^* = S^{-1}}$.

7.5. Задачи и дополнения

• **Теорема.** *Самосопряженный оператор A, определенный на всем пространстве H, — непрерывен*[9].

◄ В предположении противного на единичной сфере найдется последовательность $\{x_n\}$, на которой $\|Ax_n\| \to \infty$. Функционалы

$$\varphi_n(x) = \langle x, Ax_n\rangle$$

линейны и поточечно ограничены:

$$|\varphi_n(x)| = |\langle Ax, x_n\rangle| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x_n\| = \|Ax\|.$$

Поэтому (по *теореме Банаха—Штейнгауза*) их нормы равномерно ограничены ($\|\varphi_n\| < M < \infty$), что в силу $\|\varphi_n\| = \|Ax_n\|$ исключает возможность $\|Ax_n\| \to \infty$. ►

• В гильбертовом пространстве помимо основного определения вполне непрерывного оператора действует эквивалентное: ***оператор вполне непрерывен, если он всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.***

[9] Т. е. симметрия влечет за собой ограниченность, а значит — и непрерывность.

• В банаховом пространстве последовательность вложенных замкнутых выпуклых ограниченных множеств может иметь пустое пересечение[10]. В гильбертовом пространстве такая последовательность всегда имеет непустое пересечение. (?)

• Любой оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, удовлетворяет соотношениям:

$$\mathbf{R}_A^\perp = \ker A^*, \qquad (\ker A)^\perp = \overline{\mathbf{R}}_{A^*}. \quad (?)$$

• При изучении билинейных форм распространена специфическая (не совсем удачная) терминология. Функция $\varphi(x, y)$ двух аргументов $x, y \in H$ называется *полуторалинейной формой*, если она линейна по x и «сопряженно линейна» по y:

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\varphi(x, y) + \bar{\beta}\varphi(x, z).$$

Примером полуторалинейной формы является скалярное произведение $\langle x, y\rangle$, а также билинейная форма $\langle Ax, y\rangle$.

• Линейный оператор A, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H, допускает представление $A = A_1 + A_2$, где A_1 самосопряжен, а $\langle A_2 x, x\rangle \equiv 0$,

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \qquad A_2 = \frac{1}{2}(A - A^*).$$

• Ряд $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$ сходится при любом действительном x к некоторой функции $f(x)$, не интегрируемой по Лебегу. (?)

[10] Но если это последовательность шаров, то пересечение непусто.

Глава 8

Обобщенные функции

Теория обобщенных функций подробно излагается в [4, 6, 17]. В [17] обобщенные функции называются распределениями, как их называл один из родоначальников теории Л. Шварц[1]. Это название имеет свои плюсы, вызывая полезные физические ассоциации.

8.1. Основные понятия

Идеология соответствия при описании плотностей распределения каких-либо физических зарядов дает сбой в случае «вырождения» (точечные массы и прочие «неприятности»). Это приводит к мысли описывать функции f не как механизм соответствия, а как функционал

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{8.1}$$

на некотором подходящем пространстве $\mathbb{D}$ функций $\varphi(x)$.

При достаточном ассортименте элементов $\varphi(x)$ для обычных функций $f \neq g$ найдется элемент $\varphi_{fg} \in \mathbb{D}$, позволяющий отличить f от g:

$$\langle f, \varphi_{fg} \rangle \neq \langle g, \varphi_{fg} \rangle.$$

Смешения, таким образом, не происходит. Старые возможности сохраняются, появляются — новые.

Пространство $\mathbb{D}$ основных функций. Успех дела во многом зависит от того, насколько удачно определено *пространство* $\mathbb{D}$. В исторической реальности выбор опирается на метод проб и ошибок. В книги попадает готовый результат.

[1] Первая работа по теории обобщенных функций принадлежит С. Л. Соболеву (Матем. сб. 1936. 1. С. 39–72). Л. Шварц несколько позже (Theorie des distributions, I–II. Paris, 1950–1951) предпринял систематическое исследование.

Множество $\mathbb{D}$ определяется как совокупность *финитных функций*, непрерывно дифференцируемых любое число раз[2].

Непрерывная функция $\varphi(x)$ называется ***финитной****, если область, в которой $\varphi(x) \neq 0$, — ограничена*[3]*. Замыкание области, где $\varphi(x) \neq 0$, именуется* ***носителем*** *$\varphi(x)$ и обозначается как* $\operatorname{supp}\varphi$*. Разные функции из $\mathbb{D}$ могут быть отличны от нуля на разных областях (у каждой свой носитель).*

Очевидно, $\mathbb{D}$ — линейное пространство. Топология в $\mathbb{D}$ вводится следующим образом.

Пусть $\mathbb{D}_\alpha$ обозначает совокупность финитных функций, носители которых принадлежат сегменту $[-\alpha, \alpha]$. Топология в $\mathbb{D}_\alpha$ определяется системой полунорм

$$p_{k\alpha}(x) = \sup\left\{\sum_{j=0}^{k} |x^{(j)}(t)| \,:\, t \in [-\alpha, \alpha]\right\}. \tag{8.2}$$

Если α в (8.2) освободить, и с помощью этих полунорм ввести топологию в $\mathbb{D}$, — получится топология, индуцированная из $C^\infty(-\infty, \infty)$. На самом деле используется иной рецепт и другая топология. Локальная база нуля в $\mathbb{D}$ строится из всех выпуклых уравновешенных и поглощающих множеств, которые в пересечении с каждым $\mathbb{D}_\alpha$ дают окрестности $\mathbb{D}_\alpha$. В результате $\mathbb{D}$ становится локально выпуклым *неметризуемым* пространством.

Конечно, такая конструкция выглядит заумно, и не очень ясно, чем не устраивает многообразие финитных функций с топологией, индуцированной из C^∞? Но последний вариант равносилен использованию минного поля под картошку. Дело в том, что $\mathbb{D}$ в топологии из C^∞ неполно, в результате чего фундаментальные последовательности $\{\varphi_n\}$ могут «сходиться» к функциям с некомпактным носителем, — и разговор о непрерывности линейных функционалов на $\mathbb{D}$ теряет смысл со всеми вытекающими последствиями.

Отказ же от финитности основных функций плох по другой причине. Интегралы (8.1) становятся несобственными не только по форме, но и по сути, что заводит ситуацию в тупик[4].

---

[2] В жизни никогда не удается решить что-нибудь раз и навсегда. Все время требуется гибкость. Вариант выбора $\mathbb{D}$ не является единственным. Для других целей больше подходят другие способы задания $\mathbb{D}$. В частности, — при изучении преобразования Фурье обобщенных функций [6].

[3] Измеримая функция $\varphi(x)$ *финитна*, если имеет ограниченный *носитель* — наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp}\varphi$, вне которого $\varphi(x) = 0$ почти всюду.

[4] Например, при определении дифференцирования. И не только.

Сходимость в $\mathbb{D}$. Введенная топология порождает специфическую сходимость: последовательность $\varphi_n \subset \mathbb{D}$ сходится к φ, если объединение всех носителей,

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} \varphi_n,$$

ограничено[5], и производные $\varphi_n^{(k)}(x)$ любого фиксированного порядка k сходятся к $\varphi^{(k)}(x)$ равномерно на Ω.

Топологию в $\mathbb{D}$ можно было вообще не описывать, ограничившись определением сходимости[6]. Но пример неметризуемой топологии, широко используемой в прикладных задачах, было бы жалко упустить с точки зрения демонстрационных целей. Это во-первых. Во-вторых, явное указание топологии способствует рассмотрению ряда вопросов обоснования, которые здесь обходятся стороной.

8.1.1. Определение. *Всякий линейный непрерывный функционал $\langle f, \varphi\rangle$ на $\mathbb{D}$ называется обобщенной функцией.*

Непрерывность функционала понимается как

$$\varphi_n \to \varphi \quad \Rightarrow \quad \langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle,$$

где $\varphi_n \to \varphi$ означает введенную в $\mathbb{D}$ сходимость. Сложение функционалов (обобщенных функций) и умножение на число определяются естественным образом:

$$\langle f+g, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle + \langle g, \varphi\rangle, \qquad \langle \alpha f, \varphi\rangle = \alpha\langle f, \varphi\rangle.$$

Из-за наслоения понятий возникает некоторая неуклюжесть. Хорошо было бы говорить просто о функционалах, но вектор $f(x)$, с помощью которого записывается функционал (8.1), *получается как бы «главнее» — и классифицируется как обобщенная функция. В результате теория развивается с помощью функционалов f, аргументами которых служат $\varphi \in \mathbb{D}$, а в уме держатся функции f с аргументами $x \in \mathbb{R}$.*

---

[5] Т. е. все $\varphi_n(x)$ равны нулю вне ограниченной области Ω.

[6] Тем более что сходимость определяет топологию.

Не каждый функционал на $\mathbb{D}$ может быть представлен в виде (8.1). Если это возможно, — обобщенную функцию $f(x)$ называют *регулярной*. К регулярным относятся обычные функции. Интегрирование в (8.1) — фактически по ограниченной области (в силу финитности φ) — упрощает ситуацию, понижая требования к $f(x)$ до *локальной суммируемости*. Для кусочно-непрерывных $f(x)$ достаточно интегрировать по Риману, для измеримых — по Лебегу[7].

Пресловутая *дельта-функция* $\delta(x)$ — есть функционал, действующий в $\mathbb{D}$ по правилу $\boxed{\langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0)}$. В рамки (8.1) это не укладывается, но для достижения единообразия чисто условно пишут

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx. \tag{8.3}$$

Другое дело что запись (8.3) морально оправданна в случае сходимости функционалов[8] $f_n \to \delta$, которые отвечают обычным функциям, и тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx.$$

В качестве f_n используют «единичные импульсы» различной формы. Например,

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}e^{-n^2x^2/2}, \qquad f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x}.$$

Эти примеры напоминают, что носитель само́й обобщенной функции[9] (в отличие от функций из $\mathbb{D}$) не обязан быть ограниченным.

Сходимость обобщенных функций. Последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций называют *сходящейся к обобщенной функции* f, если $\langle f_n,\varphi\rangle \to \langle f,\varphi\rangle$ для любой функции $\varphi \in \mathbb{D}$.

Таким образом, сходимость обобщенных функций — есть *поточечная сходимость функционалов* (но не поточечная сходимость самих обобщенных функций).

[7] Функции, интегрируемые по любому ограниченному множеству, принято называть *локально интегрируемыми* (*суммируемыми*).

[8] См. ниже.

[9] Носитель обобщенной функции — есть минимальное по включению замкнутое множество $\operatorname{supp} f$ такое, что $\langle f,\varphi\rangle = 0$, если носитель $\varphi(x)$ не пересекается с $\operatorname{supp} f$. Носитель $\delta(x)$ — $\{0\}$.

Если бы пространство $\mathbb{D}$ было банаховым, можно было бы говорить о слабой[10] сходимости функционалов, о сопряженном пространстве $\mathbb{D}^*$ и об установленных ранее фактах относительно таких объектов. Однако $\mathbb{D}$ — не банахово, не нормированное и даже не метрическое пространство. Но это все-таки «хорошее» пространство, и потому обозначение $\mathbb{D}^*$ для совокупности функционалов на $\mathbb{D}$ с указанной сходимостью — в определенной степени оправданно. Далее можно развивать теорию «слабой сходимости» функционалов, действующих в сопряженном пространстве $\mathbb{D}^*$.

Пространство $\mathbb{D}^*$ полно, поскольку фундаментальность $\{f_n\}$ в указанном выше смысле означает сходимость числовых последовательностей $\langle f_n, \varphi\rangle$ при любом φ, но тогда поточечный предел есть непрерывный линейный функционал $\langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{D}^*$.

Замена переменных. Формулы *сдвига* и *умножения*,

$$\langle f(x-u), \varphi\rangle = \langle f, \varphi(x+u)\rangle,$$
$$\langle f(\gamma x), \varphi\rangle = |\gamma|^{-1}\left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right)\right\rangle, \tag{8.4}$$

получаются как непосредственные следствия свойств интегрирования — с добавлением предельного перехода, если функционал не записывается в виде (8.1). Модуль на γ появляется в связи с тем, что при $\gamma < 0$ замена переменных $y = \gamma x$ производит рокировку пределов интегрирования, и при восстановлении статус-кво появляется минус.

Формулы (8.4) в общем случае зависают в середине пути. Для дельта-функции итог более конкретен:

$$\langle \delta(x-u), \varphi(x)\rangle = \varphi(u), \qquad \langle \delta(\gamma x), \varphi(x)\rangle = |\gamma|^{-1}\varphi(0).$$

Линейная замена $\alpha x - \beta = y$ приводит к

$$\langle \delta(\alpha x - \beta), \varphi(x)\rangle = |\alpha|^{-1}\varphi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

что позволяет говорить о равенстве $\delta(\alpha x - \beta) = |\alpha|^{-1}\delta(x - \beta/\alpha)$. В более общем случае функции $f(x)$ из C^∞ с простыми нулями — аналогично получается формула

$$\delta[f(x)] = \sum_{f(x_k)=0} \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}.$$

В частности,

$$\delta(x^3-1) = \frac{\delta(x-1)}{3}, \qquad \delta(x^2-1) = \frac{\delta(x-1)}{2} + \frac{\delta(x+1)}{2}.$$

[10] Точнее, $(*)$-слабой.

8.2. Дифференцирование

В ситуации, когда обобщенная функция регулярна, т. е. представима в виде (8.1), интегрирование по частям приводит к

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx,$$

а поскольку

$$f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

в силу финитности φ, возникает простое *правило переброски производной* [11]

$$\boxed{\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle.} \tag{8.5}$$

Если же функционал f не представим в форме (8.1), но $f_n \to f$, где все f_n регулярны, то

$$\langle f_n', \varphi\rangle = -\langle f_n, \varphi'\rangle \to \langle f, \varphi'\rangle = -\langle f', \varphi\rangle,$$

что позволяет считать формулу (8.5) определением *производной обобщенной функции* независимо от способа представления функционала.

Последовательное применение (8.5) k раз дает формулу для k-й производной:

$$\boxed{\langle f^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)}\rangle.} \tag{8.6}$$

В соответствии с (8.6) k-я производная дельта-функции определяется функционалом

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)}\rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0),$$

[11] При этом дифференцируемыми в обобщенном смысле оказываются разрывные и вообще измеримые функции. Тяжесть операции перекладывается на плечи $\varphi(x)$.

а производная *функции Хэвисайда* (*единичного скачка*)[12] оказывается равной $\delta(x)$. Действительно,

$$\langle\theta',\varphi\rangle = -\langle\theta,\varphi'\rangle = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle,$$

откуда $\theta' = \delta$.

Дифференцируемость без всяких ограничений — одно из главных достижений теории обобщенных функций, почему, собственно, последняя широко применяется в дифференциальных уравнениях. Важно и другое. В определенном смысле на обобщенные функции можно смотреть как на обобщенные производные непрерывных функций. Дельта-функция, например, есть вторая производная $f(x) = \frac{1}{2}|x|$. За деталями точных формулировок можно обратиться к [6, 17].

8.3. Свертка обобщенных функций

Свертка обычных функций определяется как

$$f * g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy. \tag{8.7}$$

Так же может быть определена свертка обобщенных регулярных функций. Разумеется, нужны оговорки. Формула формулой, но правило должно допускать реализацию и не выводить за пределы игрового поля. Проще говоря, интеграл должен браться и снова давать регулярную функцию. Для этого достаточно, например, чтобы одна из функций имела ограниченный носитель.

Определение свертки нерегулярных функций связано с преодолением некоторых технических препятствий [4, 6, 17], на которых в данном контексте не имеет смысла задерживаться. Для дальнейшего достаточно ограничиться случаем, когда одна из двух функций f

---

[12] $\theta(x \geqslant 0) = 1$ и $\theta(x < 0) = 0$.

или g — является дельта-функцией. Тогда

$$\langle\delta * f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)f(x-z)dz = f(x)$$

легко обосновывается с помощью сходящихся к $\delta(x)$ последовательностей регулярных функций.

При этом, очевидно,

$$\frac{d}{dx}(\delta * f) = \frac{d\delta}{dx} * f = \delta * \frac{df}{dx},$$

что является частным случаем общего правила дифференцирования свертки, $\boxed{(f*g)' = (f'*g) = (f*g')}$.

8.4. Дифференциальные уравнения

В теории обобщенных функций решение линейных дифференциальных уравнений

$$Lx(t) = f(t), \tag{8.8}$$

где $Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x$, основывается на *фундаментальном решении*, удовлетворяющем уравнению

$$Lx(t) = \delta(t).$$

Если $\widehat{x}(t)$ фундаментальное решение, то решение (8.8) получается сверткой $\widehat{x}(t)$ с правой частью $f(t)$, поскольку

$$L(\widehat{x} * f) = (L\widehat{x} * f) = (\delta * f) = f.$$

В случае неавтономного уравнения,

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x,$$

детализация процесса выглядит так. Пусть $G(t,s)$ обозначает фундаментальное решение уравнения $LG(t,s) = \delta(t-s)$. Умножение последнего на $f(s)$ и интегрирование по s дает $Lx(t) = f(t)$, т.е.

$$x(t) = \int G(t,s)f(s)\,ds, \tag{8.9}$$

где ядро $G(t,s)$ называют также *функцией Грина*.

В автономном случае $G(t, s)$ является функцией одного параметра $\tau = t - s$, и вместо (8.9) получается

$$x(t) = \int G(\tau) f(t - \tau)\, ds.$$

8.5. Расходящиеся ряды

Любая *локально интегрируемая функция* [13], как обобщенная, — дифференцируется сколько угодно раз, без всяких проблем. Более того, если $f_n \to f$, то и $f_n' \to f'$. А если на $f_n \to f$ смотреть как на частичные суммы некоторого ряда, получается удивительная вещь. Сходящийся ряд можно сколько угодно раз дифференцировать, он будет сходиться. Разумеется, в обобщенном смысле.

Например, ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \tag{8.10}$$

сходится к разрывной периодической функции $f(x)$, принимающей значения $\dfrac{\pi - x}{2}$ на внутренности промежутка $[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Обобщенная производная $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \pi \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi)$. С другой стороны, почленное дифференцирование (8.10) дает расходящийся в обычном смысле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos kx$. Но оба результата как обобщенные функции — равны друг другу,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = -\frac{1}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi).$$

Это спасло психологическое здоровье многим физикам, потому что в квантовой механике расходящиеся интегралы и ряды долгое время были источником неврозов. Но подоплека истории, конечно, не в том, что математики установили сходимость расходящихся интегралов и рядов. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos kx$ сходится и расходится одновременно. Вопрос в том, для чего он используется. Если фигурирует только в промежуточных выкладках, но в итоге попадает

[13] Интегрируемая на любом компакте.

под гусеницы интегрирования, — его можно считать сходящимся как обобщенную функцию[14].

Расходящиеся интегралы. Проблема расходящихся интегралов несколько шире. В одном из вариантов она имеет то же происхождение, что и в описанной выше ситуации.

Вот другой пример: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x}$. Выход из положения возможен, если тому благоприятствуют обстоятельства. Например, есть резон в

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx,$$

во втором слагаемом, интеграл понимать в смысле главного значения. Тогда проблема особой точки в нуле снимается, и $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x}$ оказывается линейным функционалом на $\mathbb{D}$, определяющим обобщенную функцию $1/x$.

Общий подход к такого рода проблемам заключается в *регуляризации интегралов* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$, где у $f(x)$ — конечное число особых точек на любом ограниченном промежутке. Для функции f выделяется подпространство $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{D}$ функций $\varphi(x)$, обращающихся в нуль в некоторых окрестностях особых точек функции $f(x)$. На таких функциях интеграл сходится, определяя функционал $\langle f, \varphi\rangle$ на $\mathbb{D}_f$. Затем функционал непрерывно продолжается с $\mathbb{D}_f$ на $\mathbb{D}$ (при этом вспоминается *теорема Хана—Банаха*), что и называют *регуляризацией интеграла* [6].

[14] Это хороший пример на тему необходимости понимания обстоятельств за кадром.

Глава 9

Уравнения

9.1. Линейные уравнения

Линейная алгебра в известной степени является «итогом размышлений» над уравнениями $Ax = y$ с матрицей A. Отправной точкой функционального анализа также можно считать уравнение

$$Ax = y$$

с линейным оператором $A : E_1 \to E_2$.

На первый взгляд, достаточно потребовать существования обратного оператора. Тогда $x = A^{-1}y$ — и весь разговор. Однако пример той же линейной алгебры показывает, что это далеко не так. В бесконечномерном случае появляются дополнительные «ветряные мельницы», в связи с чем возникают варианты [14]. Уравнение $Ax = y$ называется *корректно разрешимым*, если обратный оператор A^{-1} существует и ограничен; *нормально разрешимым*, если область значений $\mathbf{R}_A$ замкнута в E_2; *плотно разрешимым*, если $\mathbf{R}_A$ плотно в E_2. И это далеко не весь диапазон разнообразия — см. [14].

В прикладном отношении интерес представляют частные классы уравнений. Общие вопросы имеют более академический характер и, в принципе, решаются на основе теоретической базы, описанной в главах 6, 7.

Приведем ряд утверждений, которые можно трактовать как упражнения[1]. Под ортогональностью далее подразумевается *биортогональность*, либо можно считать, что речь идет о гильбертовом пространстве.

• *Ядро сопряженного оператора является ортогональным дополнением к области значений (образу) исходного оператора.*

---

[1] Доказательства, в крайнем случае, можно найти в [14]. См. также следующий раздел, где можно почерпнуть некоторые схемы рассуждений.

• *Для нормальной разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $Ax = y$ было разрешимо для тех и только тех правых частей, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения $A^*x = 0$.*

• *Для однозначной разрешимости $Ax = y$ на $\mathbf{R}_A$ достаточно, чтобы $A^*f = g$ было плотно разрешимо.*

• *Для разрешимости $A^*f = g$ при любом g необходима и достаточна корректная разрешимость $Ax = y$ на $\mathbf{R}_A$.*

• *Для разрешимости $Ax = y$ при любом y необходима — а если A замкнут, то и достаточна — корректная разрешимость $A^*f = g$ на $\mathbf{R}_{A^*}$.*

9.2. Выбор пространства

Если задача не из задачника, то это всегда проблема. Господь дает интегральные уравнения, а подбирать функциональное пространство приходится самому. Попытка решить уравнение обнаруживает, что надо утрясти многое другое[2]. Центр тяжести приходится на вопрос, что понимать под x, поскольку необходимо определиться, о каких функциях идет речь. Бесхитростный выход из положения «пусть будут такие-то» не годится по многим причинам.

Допустим, оператор A переводит непрерывные функции в дифференцируемые. Понятно, что тогда $Ax = y$ в случае не дифференцируемой функции y — непрерывного решения не имеет. Но если $Ax = y$ достаточно точно описывает связь переменных в реальной системе, которая «работает», то решение есть, и надо разобраться — в каком смысле. Иначе говоря, вопрос сводится к пониманию того, на каком множестве функций надо рассматривать оператор A, чтобы возникающие проблемы естественно решались.

Эпизод не дифференцируемого y дает лишь слабый намек на принципиальную проблему выбора пространства, в котором целесообразно решать задачу. Загвоздка кроется не только в соответствии выбранной метрики физической задаче, стоящей за кадром. Выбор «хорошего» пространства определяется еще и оператором A.

[2] Примерно как попытка заняться бизнесом ведет к необходимости взаимодействия с пожарниками, юристами, посредниками и т. п. На производство и торговлю времени почти не остается.

Идеологической установке на близость в среднем отвечают, например, *пространства* L_p. Конкретное p выбирается так, чтобы обеспечить непрерывность оператора и другие желаемые свойства.

Пример Урысона. Разрешимость уравнения в зависимости от игрового поля — вещь нехитрая. Достаточно вспомнить квадратное уравнение на вещественной прямой и в комплексной плоскости. Но в функциональных пространствах аналогичное явление производит иногда совсем другое впечатление.

Интегральное *уравнение Вольтерра*

$$x(t) = \int_0^t G(t, s)x(s)\, ds$$

с ядром

$$G(t, s) = \begin{cases} se^{1/t^2-1}, & \text{если} \quad 0 \leqslant s \leqslant te^{1/1-t^2}; \\ t, & \text{если} \quad te^{1/1-t^2} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

не имеет решений в пространстве $L_1[0, 1]$, но имеет на $[0, 1]$ несуммируемое решение $x(t) = 1/t$, $x(0) = 0$, которое по нематематическим соображениям может устраивать, и тогда приходится задумываться о каких-нибудь *обобщенных функциях*.

9.3. «Фредгольмовы» уравнения

Интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)x(s)\, ds + y(t)$$

называют *уравнением Фредгольма* 2*-го рода*[3].

При изложении теории таких уравнений от интегральной специфики можно уйти, изучая абстрактное уравнение $Ax = y$ в банаховом пространстве с линейным оператором $A = I - T$, где T — вполне непрерывен.

Если не рассыпать содержание по мелким утверждениям, получается длинная теорема, зато — одна.

[3] *Уравнение Фредгольма* 1*-го рода*: $\int_a^b G(t, s)x(s)\, ds = y(t)$.

9.3.1. Теорема. *Пусть T действует и вполне непрерывен в банаховом пространстве E. Тогда уравнения*[4]

$$x - Tx = y, \quad f - T^* f = g$$

либо оба разрешимы при любых правых частях, что соответствует исключительно нулевой разрешимости однородных уравнений $x - Tx = 0$ и $f - T^* f = 0$, либо однородные уравнения имеют конечное число линейно независимых решений[5]

$$x_1, \ldots, x_n; \quad f_1, \ldots, f_n;$$

и тогда для разрешимости $x - Tx = y$ $(f - T^* f = g)$ необходимо и достаточно, чтобы при всех j от 1 до n:

$$\langle f_j, y \rangle = 0 \qquad (\textit{соответственно, } \langle g, x_j \rangle = 0).$$

Общие решения уравнений $x - Tx = y$ и $f - T^* f = g$ в этом случае имеют вид линейных комбинаций

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \qquad f = f_0 + \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j,$$

где x_0 и f_0 — какие-либо частные решения исходных уравнений.

Обоснование удобно разделить на ингредиенты, рассмотрение которых проливает дополнительный свет и может служить пищей для размышлений. Заодно становится ясно, что любая формулировка топит нюансы. Не говоря о том, что произнесенная правда — есть ложь.

9.3.2. *Для разрешимости $x - Tx = y$ при любом данном y необходимо и достаточно $\langle f, y \rangle = 0$ для любого функционала f, удовлетворяющего сопряженному однородному уравнению $f - T^* f = 0$.*

◄ *Необходимость.* Из $y = x - Tx$ и $f - T^* f = 0$ следует

$$\langle f, y \rangle = \langle f, x - Tx \rangle = \langle (I - T)^* f, x \rangle = \langle f - T^* f, x \rangle = 0.$$

Достаточность. Пусть $f(y) = 0$ для всех f, удовлетворяющих $f - T^* f = 0$. Тогда $y \in \mathrm{R}_{I-T}$. В предположении противного, $y \notin \mathrm{R}_{I-T}$, из теоремы Хана—Банаха вытекает (поскольку R_{I-T} — замкнутое подпространство по теореме 6.11.3)

[4] T^* — сопряженный оператор.

[5] Число которых совпадает. (!)

существование такого функционала f_0, что $\langle f_0, y\rangle = 1$ и $\langle f_0, u\rangle = 0$ для любого $u \in \mathbf{R}_{I-T}$, — последнее означает $f_0 - T^* f_0 = 0$ и приводит к противоречию. ►

Утверждению 9.3.2 двойственно следующее (доказательство аналогично, до некоторой степени).

9.3.3. *Для разрешимости $f - T^* f = g$ при любом данном $g \in E^*$ необходимо и достаточно $\langle g, x\rangle = 0$ для любого x, удовлетворяющего однородному уравнению $x - Tx = 0$.*

Из приведенных утверждений ясно, что при отсутствии ненулевых решений у $f - T^* f = 0$ уравнение $x - Tx = y$ разрешимо при любом y. Аналогично: из «$x - Tx = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$» вытекает разрешимость $f - T^* f = g$ при любом g. Более того:

> *Для разрешимости неоднородного уравнения ($x - Tx = y$ либо $f - T^* f = g$) при любой правой части необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение (любое из $x - Tx = 0$, $f - T^* f = 0$) имело только тривиальное решение.*

Чтобы убедиться в справедливости сказанного, — к уже установленному необходимо добавить следующий результат.

9.3.4. *Для разрешимости неоднородного уравнения*[6] *$x - Tx = y$ при любом y необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $x - Tx = 0$ имело только нулевое решение.*

◄ *Необходимость.* Предположим противное, $I - T$ отображает E на E, но

$$N_1 = \ker(I - T) \neq \{0\}.$$

Тогда имеет место цепочка *строгих* включений

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots N_k \subset \cdots,$$

где N_k обозначает нуль-пространство оператора $(I - T)^k$. Действительно, для любого ненулевого $x_1 \in N_1$ уравнение $(I - T)x = x_1$ имеет решение $x_2 \notin N_1$, причем

$$(I - T)^2 x_2 = (I - T)x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \in N_2,$$

так что $N_1 \subset N_2$ строго. И так далее.

Из леммы 4.3.6 вытекает существование некомпактной (не фундаментальной) последовательности $\{z_k \in N_k \setminus N_{k-1}\}$ на единичной сфере, все $\|z_k\| = 1$, чего не может быть в силу компактности оператора T, поскольку $\{z_k\} = \{Az_k\}$.

---

[6] Оператор T в пределах раздела — вполне непрерывен.

Достаточность. Если $x - Tx = 0$ имеет лишь нулевое решение, то $f - T^* f = g$ разрешимо при любом g. Только что доказанная «необходимость» применима и к оператору T^* (который вполне непрерывен по теореме 6.11.4), откуда следует лишь тривиальная разрешимость $f - T^* f = 0$. Но тогда, по ранее установленному, $x - Tx = y$ имеет решение при любом y. ►

Теперь остается последний шаг.

9.3.5. *Однородные уравнения $x - Tx = 0$ и $f - T^* f = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.*

Установим конечность числа решений.

9.3.6. Лемма. *Нуль-пространство оператора $I - T$, т. е. множество решений однородного уравнения $x - Tx = 0$, — конечномерно.*

◄ Любое ограниченное множество $\Omega \subset \ker(I - T)$ оператор T, с одной стороны, оставляет на месте, $T\Omega = \Omega$, с другой — переводит в предкомпактное. Выходит, что любое ограниченное множество в $\ker(I - T)$ предкомпактно, значит, $\ker(I - T)$ по теореме 4.3.5 конечномерно. ►

Разумеется, то же самое можно сказать о нуль-пространстве оператора $I - T^*$ благодаря теореме 6.11.4.

Теперь необходимо обосновать совпадение числа линейно независимых решений. Ограничимся рассуждением для частного случая гильбертова пространства H, чтобы не загромождать обзор биортогональными базисами.

◄ Итак, пусть однородные уравнения $x - Tx = 0$ и $f - T^* f = 0$ имеют, соответственно, решения

$$x_1, \dots, x_n; \quad f_1, \dots, f_m,$$

которые без ограничения общности можно считать ортонормированными базисами[7] в $\ker(I - T)$ и $\ker(I - T^*)$.

Предположим противное, например $m > n$, и рассмотрим оператор

$$(I - S)x = (I - T)x + \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x \rangle f_j, \tag{9.1}$$

где S, очевидно, вполне непрерывен, так как получается добавлением к T конечномерного оператора $\sum \langle x_j, x \rangle f_j$.

---

[7] В противном случае можно воспользоваться *ортогонализацией Шмидта*.

Поскольку ядро $\ker(I - T^*)$ и образ $\mathbf{R}_{I-T}$ ортогональны[8], то все f_j в (9.1) перпендикулярны любому вектору $(I - T)x$. Поэтому $(I - S)x = 0$ имеет только тривиальное решение. Но тогда $(I - S)x = f_{n+1}$, т. е.

$$(I - T)x + \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x\rangle f_j = f_{n+1} \qquad (\text{напомним, } n < m) \tag{9.2}$$

имеет ненулевое решение, что невозможно. После умножения (9.2) скалярно на f_{n+1} — справа получается единица, слева — нуль, потому что ядро $\ker(I - T^*)$ и образ $\mathbf{R}_{I-T}$, как уже отмечалось, ортогональны друг другу.

Ситуация $n > m$ приводится к противоречию аналогично. ▶

9.4. Последовательные итерации

Для практического решения уравнения $x = Ax + y$ часто используется итерационная процедура

$$x_{k+1} = Ax_k + y. \tag{9.3}$$

Поэтапно это выглядит так:

$$\begin{aligned}
&x_1 = Ax_0 + y,\\
&x_2 = A^2x_0 + Ay + y,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
&x_k = A^kx_0 + A^{k-1}y + \ldots + Ay + y,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

При условии $\boxed{\|A\| < 1}$ слагаемое A^kx_0 стремится к нулю, поскольку $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому динамика процесса (9.3) определяется сходимостью ряда $\sum_k^{\infty} A^k$, который сходится в силу

$$\|I + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots\| \leqslant 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \ldots = \frac{1}{1 - \|A\|},$$

что влечет за собой сходимость x_k к решению уравнения

$$x = Ax + y, \qquad x = (I - A)^{-1}y,$$

[8] Из $y \in \mathbf{R}_{I-T}$, т. е. $y = x - Tx$, следует

$$\langle f, y\rangle = \langle f, x - Tx\rangle = \langle (I - T)^* f, x\rangle = \langle f - T^* f, x\rangle = 0,$$

если $f \in \ker(I - T^*)$.

соответственно,

$$I + A + A^2 + \ldots + A^k + \ldots \to (I - A)^{-1}.$$

Обусловленность. Решение уравнений, независимо от используемых методов, связано с ошибками исходных данных. Это технически громоздкая проблематика, не способствующая воодушевлению, но она, можно сказать, обязательна, если думать о результате.

Вот максимально очищенный от деталей фрагмент.

Если правая часть в $Ax = y$ задается с ошибкой Δy, то ошибка решения Δx удовлетворяет соотношению $A(x + \Delta x) = y + \Delta y$, откуда:

◄ $\|y\| = \|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|, \qquad \|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta y\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta y\|,$

что приводит к относительной ошибке

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \sigma(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \quad ►$$

Если с ошибкой задается оператор,

$$Ax = y \quad \text{и} \quad (A + \Delta A)(x + \Delta x) = y,$$

то аналогично предыдущему:

◄ $\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x + \Delta x\|,$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leqslant \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \sigma(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \quad ►$$

В том и другом случае определяющую роль играет величина

$$\boxed{\sigma(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,}$$

называемая *числом обусловленности* оператора A.

9.5. Проекционные методы

Наряду с итерационными процедурами в вычислительной практике широко используются ***проекционные***, или как их еще называют — ***галёркинские методы***, основанные на конечномерных аппроксимациях решаемых уравнений.

Центральная идея выглядит просто и естественно. Для решения уравнения

$$Ax = y$$

в банаховом (а лучше — гильбертовом) пространстве выбирается базис $\{e_j\}$, и приближенное решение

$$x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$$

ищется как решение системы уравнений

$$\left\langle A\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k \right\rangle = \langle y, e_k \rangle, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{9.4}$$

Оператор A, вообще говоря, может быть нелинейным, и действовать не в E, а из E_x в E_y — тогда приходится задавать два базиса.

На другом языке то же самое излагается иначе. Задаются последовательность подпространств $\{E_n\}$ и линейные проекторы $P_n : E \to E_n$, с помощью которых исходное уравнение заменяется приближенными $P_n A x_n = P_n y$, и ищутся приближенные решения x_n.

Работоспособность идеи упирается в два главных вопроса: разрешимость системы (9.4) и сходимость x_n при $n \to \infty$ к истинному решению $Ax = y$. Все это сопровождается сопутствующими проблемами разного калибра. Подробности в [12, 20].

9.6. Регуляризация

Пусть, для конкретности разговора, речь идет об интегральном уравнении $Gx = y$ в L_2,

$$Gx = \int_0^1 G(s,t)x(s)\,ds = y(t), \qquad \int_0^1\int_0^1 G^2(s,t)\,ds\,dt < \infty.$$

Понятно, что при некоторых $y \in L_2$ уравнение $Gx = y$ не имеет решения[9]. Кроме того, оператор G^{-1} неограничен, поэтому решения $Gx = y$ с близкими по норме L_2 правыми частями могут быть сколь угодно далеки друг от друга. Это означает, что задача плохо поставлена, и ее надо как-то видоизменить.

> ***Отход от исходной постановки задачи иногда воспринимается как сдача позиций, но это чаще шаг вперед. Вывод уравнений для конкретной физической системы всегда опирается на явные и неявные приближения и допущения, о которых потом забывают, в результате чего полученное описание идеализируется. Трезвый взгляд освобождает ситуацию от случайных наслоений и позволяет смотреть на мир менее категорично.***

Метод регуляризации [19] основывается на переходе от уравнения $Gx = y$ к «оптимизационной» задаче

$$||Ax - y||^2 + \gamma||x||^2 \to \min_{x \in L_2}, \qquad \gamma > 0,$$

сводящейся к решению уже корректного уравнения

$$\gamma x + G^* G x = G^* y. \tag{9.5}$$

На решении x_γ уравнения (9.5) в естественных предположениях норма $||Ax_\gamma - y|| \to 0$ при $\gamma \to 0$.

9.7. Дополнение

• Результаты, изложенные в разделе 9.3, обобщаются на более широкие классы уравнений, чем $(I - T)x = y$ с компактным оператором T. Уравнения $Ax = y$ в общей ситуации характеризуются как *нётеровы*, если конечны размерности

$$\alpha_A = \dim \ker A, \qquad \beta_A = \dim \operatorname{coker} A.$$

При этом разность $i_A = \alpha_A - \beta_A$ называют *индексом оператора A*. В случае нулевого индекса оператор называют *фредгольмовым*. Однако терминология здесь «гуляет».

Подробности в [10, 14].

---

[9] Потому что интегрирование обладает «улучшающими» свойствами, вследствие чего образ GL_2 строго включен в L_2.

• Прикладная востребованность *нётеровых* уравнений общего типа, конечно, не так высока. Но здесь достаточно сказать, что к этим уравнениям относится *уравнение Винера—Хопфа*

$$x(t) - \int_0^\infty k(t-s)x(s)\,ds = y(t),$$

возникающее в различных областях (задачи фильтрации, перенос излучения, дифракция), — при его рассмотрении в пространстве $L_1(0,\infty)$. Вообще потеря интегральными операторами свойства полной непрерывности при переходе к бесконечным областям интегрирования — явление достаточно характерное.

Глава 10

Спектральная теория

10.1. Ориентировка

Спектры линейных операторов в функциональных пространствах нужны для тех же целей, что и собственные значения матриц. Другое дело, что получается не совсем так, как в линейной алгебре. Спектр как совокупность собственных значений теперь не годится. Его приходится определять иначе под давлением бесконечномерных обстоятельств. Задача в целом оказывается довольно сложной и практически необозримой. Из того, что «не нужно» — многое не дается, но остальное более-менее решается. Во многих утилитарных срезах ситуация похожа на конечномерную. Надо лишь расставить «красные флажки».

Для настройки в резонанс начнем с n измерений.

Фрагмент из линейной алгебры. При переходе к другой (штрихованной) системе координат с помощью *невырожденной* матрицы T — соотношение $u = Av$ после подстановки $u = Tu'$, $v = Tv'$ превращается в $Tu' = ATv'$, что в результате умножения слева на T^{-1} переходит в $u' = T^{-1}ATv'$, на основании чего можно утверждать, что в новой системе координат линейному оператору A соответствует матрица $A' = T^{-1}AT$.

В достаточно свободных предположениях T можно выбрать так, что преобразованная матрица станет максимально простой — диагональной:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{10.1}$$

Для этого надо решить уравнение

$$Ax = \lambda x.$$

Собственные значения λ_j попадут на диагональ[1], а собственные векторы будут вектор-столбцами матрицы T. После этого любую задачу, где фигурирует

[1] Чтобы не портить настроение, о жордановых формах лучше не вспоминать.

матрица A, надо лишь записать в системе координат, ортами которой служат собственные векторы.

Вот как это может работать практически. Замена переменных $x = Ty$ приводит задачу Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

к виду

$$\dot{y} = T^{-1}ATy, \quad y(0) = T^{-1}x_0.$$

Если имеет место (10.1), то это «развязывает» исходную динамическую систему. В новых координатах система $\dot{y} = T^{-1}ATy$ распадается на независимые друг от друга скалярные уравнения $\dot{y}_k = \lambda_k y_k$, интегрирование которых по отдельности дает

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} y_k(0),$$

т. е. в векторном виде

$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} y(0).$$

Возврат в исходное пространство, $y = T^{-1}x$, приводит к решению

$$x(t) = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}x(0).$$

Бесконечномерный вариант $Ax = \lambda x$ — *задача Штурма—Лиувилля*:

$$u'' + \lambda u = 0, \qquad u(a) = u(b) = 0, \tag{10.2}$$

описывающая колебание струны, закрепленной в точках $x = a$ и $x = b$. Решением являются собственные функции и собственные значения

$$u_k(x) = \sin \frac{k\pi}{b-a} x, \qquad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2, \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{10.3}$$

Собственные значения связаны с возможными частотами ω_k колебаний системы, $\lambda_k = \omega_k^2$. Совокупность λ_k в данном случае исчерпывает спектр. С ростом $b - a$ спектр становится все плотнее и в пределе, при $b - a \to \infty$, заполняет всю область $(0, \infty)$.

Задача (10.2) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,y)u(y)\,dy.$$

Конкретный вид ядра[2)] в данном контексте не играет роли. Собственные функции интегрального оператора

$$Gu = \int_a^b G(x,y)u(y)\,dy$$

— те же самые, а собственные значения равны $1/\lambda_k$. В базисе из собственных функций (10.3) оператор G имеет *диагональный вид*

$$Gu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\xi_k u_k(x), \qquad u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k(x),$$

чем достигается аналогия с конечномерным случаем.

10.2. Общая постановка

Комплексификация пространства. Там, где речь заходит о спектре, подразумеваются комплексные операторы и пространства. Ситуация в этом аспекте не отличается от линейной алгебры. *Комплексным расширением* вещественного пространства E' называют комплексное пространство E с элементами $z = x + iy$ $(x, y \in E')$, линейные операции над которыми определяются естественным образом: при сложении действительные и мнимые части складываются по отдельности и

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x).$$

Норма в E определяется как

$$\|x + iy\| = \max_{\tau} \|x \sin\tau + y\cos\tau\|.$$

[2)] См., например: *Босс В.* Лекции по математике: Дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: УРСС, 2004.

Операторы $A : E' \to E'$ продолжаются на E по правилу

$$A(x + iy) = Ax + iAy.$$

При этом $\|A\|_E = \|A\|_{E'}$.

Спектр. Комплексное число λ называется *регулярным значением* непрерывного линейного оператора A, если оператор $A - \lambda I$ имеет определенный на E ограниченный обратный. *Спектр* $\sigma(A)$ оператора $A : E \to E$ определяется как дополнение к множеству его регулярных значений.

Иными словами, спектр $\sigma(A)$ — это совокупность λ, для которых оператор $A - \lambda I$ *необратим*, что может быть по двум причинам: оператор $A - \lambda I$ или *не инъективен*[3], или *инъективен, но не сюръективен*[4]. В $\mathbb{R}^n$ встречается только первая причина.

В случае «неинъективности» уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имеет ненулевое решение, называемое *собственным вектором*, а соответствующее λ — *собственным значением* оператора A.

Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ, вместе с нулевым элементом, — называется *собственным подпространством* N_λ оператора A. Собственное подпространство, очевидно, *инвариантно*[5].

◄ $(A - \lambda I)x_1 = y,\ (A - \lambda I)x_2 = y \quad \Rightarrow \quad A(x_1 - x_2) = \lambda(x_1 - x_2).$ ►

В общем случае множество собственных значений не исчерпывает весь спектр (как в $\mathbb{R}^n$).

• Показателен пример непрерывного *оператора умножения*

$$Ax(t) = tx(t),$$

действующего в $C[0, 1]$. Очевидно,

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t) = 0$$

[3] Не взаимно однозначен.

[4] Не является отображением «на».

[5] Подпространство L называется инвариантным, если из $x \in L$ следует $Ax \in L$.

ненулевых решений $x(t)$ в $C[0,1]$ не имеет. Поэтому собственных значений у A нет. Но спектр не пуст, $\sigma(A) = [0,1]$, поскольку обратный оператор,

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t-\lambda},$$

при $\lambda \in [0,1]$ не ограничен[6]. Выводы сохраняются при замене $C[0,1]$ на $L_2[0,1]$.

- Другой классический пример — односторонний сдвиг в l_2:

$$A\{\xi_0, \xi_1, \ldots\} = \{0, \xi_0, \xi_1, \ldots\}.$$

Опять-таки собственных значений нет, а спектр $\sigma(A)$ представляет собой единичный круг на комплексной плоскости [22].

В контексте собственных значений общая ситуация имеет прямые аналогии с линейной алгеброй.

10.2.1. Лемма. *Если оператор A имеет* ***попарно различные*** *собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и каждому λ_j отвечает свой собственный вектор x_j, то множество $\{x_j\}$ линейно независимо.*

◀ Допустим, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно зависимы[7]. Выберем из них минимальное число линейно зависимых векторов. Можно считать, после перенумерации переменных, что это первые k векторов, которые удовлетворяют соотношению

$$\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k = 0, \tag{10.4}$$

где все γ_j ненулевые, иначе k не было бы минимально. В силу $Ax_j = \lambda_j x_j$,

$$A(\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_k x_k) = \gamma_1\lambda_1 x_1 + \ldots + \gamma_k\lambda_k x_k = 0. \tag{10.5}$$

Умножая (10.4) на λ_k и вычитая из (10.5), получаем

$$\gamma_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \ldots + \gamma_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0,$$

что противоречит минимальности k. ▶

Резольвента. Обратный оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ принято называть *резольвентой* и обозначать $R(\lambda)$.

$$R(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}. \tag{10.6}$$

[6] И определен не на всем $C[0,1]$.

[7] Напомним, что линейная независимость бесконечной системы векторов определяется как линейная независимость любой конечной подсистемы.

Область определения резольвенты, состоящую из регулярных точек, называют также *резольвентным множеством.*

• Резольвента удовлетворяет *тождеству Гильберта*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu). \quad (?)$$

• *Резольвентное множество всегда открыто* (*теорема* 6.10.2), *спектр — замкнут* (*как дополнение открытого множества*).

• *Резольвентное множество* $\mathbf{R}_{(A-\lambda I)^{-1}}$ *и спектр — непусты.*

◄ Непустота $\mathbf{R}_{(A-\lambda I)^{-1}}$ вытекает из теоремы 10.2.2, а спектра — из необходимости существования особой точки, принадлежащей $\sigma(A)$, на окружности (см. раздел 10.3), определяющей радиус $\rho(A) > 0$ сходимости ряда (10.6). Случай $\rho(A) = 0$ рассматривается отдельно. ►

Ряд справа в (10.6) называют *рядом Неймана.*

10.2.2. Теорема. *При условии* $|\lambda| > \|A\|$ *ряд Неймана в* (10.6) *сходится* (*см. раздел* 9.4.) *и* λ *— регулярно.*

10.3. Спектральный радиус

Спектральный радиус $\rho(A)$ — это радиус минимального круга[8], содержащего весь спектр $\sigma(A)$.

Из теоремы 10.2.2 следует

$$\boxed{\rho(A) \leqslant \|A\|.}$$

Напомним, что эквивалентные нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ определяются существованием таких констант $\alpha, \beta > 0$, что

$$\alpha\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \beta\|x\|, \qquad x \in E.$$

При переходе к эквивалентным нормам сходящиеся последовательности остаются сходящимися, замкнутые множества — замкнутыми, открытые — открытыми.

10.3.1. Теорема. *Для любого линейного ограниченного оператора* $A : E \to E$ *можно ввести эквивалентную норму* $\|\cdot\|'$, *в которой* $\|A\|'$ *будет сколь угодно близка к спектральному радиусу* $\rho(A)$.

[8] На комплексной плоскости с центром в нуле.

◀ Спектральный радиус оператора $\widetilde{A} = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1}A$ при $\varepsilon > 0$ строго меньше 1. Поэтому $\|\widetilde{A}^k\| \to 0$ при $k \to \infty$, что означает

$$\|A^k\| \leqslant [\rho(A) + \varepsilon]^k$$

при достаточно больших k. Поэтому по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое n, что

$$\sqrt[n]{\|A^n\|} \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

Искомой нормой может служить

$$\|x\|' = (\rho(A) + \varepsilon)^{n-1}\|x\| + (\rho(A) + \varepsilon)^{n-2}\|Ax\| + \ldots + \|A^{n-1}x\|.$$

Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ эквивалентны, поскольку

$$\gamma^{n-1}\|x\| \leqslant \|x\| \leqslant \left(\gamma^{n-1} + \gamma^{n-2}\|A\| + \ldots + \|A^{n-1}\|\right)\|x\|,$$

где $\gamma = r(A) + \varepsilon$.

Поэтому

$$\rho(A) \leqslant \|A\|' = \sup_{\|x\|' \leqslant 1} \|Ax\|' \leqslant \rho(A) + \varepsilon. \quad ▶$$

10.3.2. Теорема. *Какова бы ни была норма,*

$$\rho(A) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

◀ С одной стороны,

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leqslant \|A^k\|$$

влечет за собой

$$\rho(A) \leqslant \sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

С другой — спектральный радиус матрицы $\widetilde{A} = [\rho(A) + \varepsilon]^{-1}A$ при $\varepsilon > 0$ строго меньше 1. Поэтому $\|\widetilde{A}^k\| \to 0$ при $k \to \infty$, откуда

$$\|A^k\| \leqslant [\rho(A) + \varepsilon]^k$$

при достаточно больших k. Таким образом,

$$\sqrt[k]{\|A^k\|} - \varepsilon \leqslant \rho(A) \leqslant \sqrt[k]{\|A^k\|}. \quad ▶$$

$$\rho(A) = \rho(A^*). \quad (?)$$

• Пусть *интегральный оператор Вольтерра* с непрерывным ядром $K(t, s)$,

$$Ax(t) = \int_0^t K(t, s)x(s)\,ds,$$

действует в $C[0,1]$. Последовательные итерации $x_{n+1} = Ax_n$ сходятся к нулю быстрее любой геометрической прогрессии. Действительно,

$$|x_k(t)| \leqslant K \int_0^t |x_{k-1}(s)|\,ds, \quad \text{где} \quad K = \max_{0 \leqslant t,s \leqslant 1} |K(t,s)|,$$

откуда[9)]

$$|x_n(t)| \leqslant \frac{K^n t^n}{n!} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_0(t)|,$$

т. е.

$$\|A^n x_0\| \leqslant \frac{K^n}{n!} \|x_0\|,$$

что называют *факториальной сходимостью.*

В итоге спектральный радиус $\rho(A) = 0$.

10.4. Компактные операторы

Значительная часть приложений сводится к уравнениям вида

$$x = Ax \quad \text{либо} \quad x = Ax + y,$$

с компактными операторами A, спектральные свойства которых, по этой причине, представляют особый интерес.

10.4.1. *Собственное подпространство вполне непрерывного оператора, отвечающее ненулевому собственному значению, — конечномерно.*

◀ Допустим противное. Тогда в собственном подпространстве N_λ $(\lambda \neq 0)$ любая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ (для простоты: $\|x_n\| \leqslant 1$) фундаментальна, поскольку фундаментальна последовательность $\{Ax_n\}$, а $x_n = \lambda^{-1} Ax_n$. Это означает компактность единичного шара в N_λ, чего по теореме 4.3.5 не может быть. ▶

10.4.2. *Ненулевые точки спектра λ_n вполне непрерывного оператора — изолированные.*

◀ Допустим противное, последовательность $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, и ей отвечают собственные векторы $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть L_n обозначает подпространство, натянутое на векторы $\{x_1, \ldots, x_n\}$. В силу линейной независимости $\{x_1, \ldots, x_n\}$

---

9) С использованием формулы n-кратного интегрирования

$$\int_0^t \ldots \int_0^t \varphi(s)\,ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \varphi(s)\,ds.$$

(лемма 10.2.1), $L_{n-1} \subset L_n$ и $L_{n-1} \neq L_n$, поэтому (лемма 4.3.6) на единичной сфере существует $y_n \in L_n$ такой, что $\|y_n - L_{n-1}\| = 1$. При $k < n$

$$\frac{Ay_n}{\lambda_n} - \frac{Ay_k}{\lambda_k} = y_n - \left[\frac{Ay_k}{\lambda_k} - \frac{(A-\lambda_n)y_n}{\lambda_n}\right].$$

Элемент в квадратных скобках принадлежит L_{n-1}, поскольку L_{n-1} инвариантное подпространство, $Ay_k \in L_{n-1}$ в силу $k < n$, наконец, $(A - \lambda_n)y_n \in L_{n-1}$ ввиду $(A - \lambda_n)x_n = 0$. Поэтому

$$\left\|\frac{Ay_n}{\lambda_n} - \frac{Ay_k}{\lambda_k}\right\| \geqslant 1,$$

что противоречит компактности A. ►

Из утверждения 10.4.2 вытекает, что число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda_k| > \varepsilon > 0$, — конечно. Накопление может происходить только в нуле.

10.4.3. *Ненулевая часть спектра вполне непрерывного оператора состоит только из собственных значений.*

◄ Если $\lambda \notin \sigma(A)$ и $\lambda \neq 0$, то $\mathrm{R}_{(A-\lambda I)}$ замкнуто (лемма 6.11.3), а дополнение $\mathrm{R}_{(A-\lambda I)}$ в E равно

$$\ker(A^* - \bar{\lambda} I) = 0,$$

поскольку и $\bar{\lambda} \notin \sigma(A)$. Поэтому $\mathrm{R}_{(A-\lambda I)} = E$, и точка λ регулярна. ►

Подытожим сказанное.

10.4.4. Теорема. *Спектр $\sigma(A)$ вполне непрерывного оператора — счетное множество, не имеющее предельных точек, отличных от нуля. Ненулевые $\lambda \in \sigma(A)$ являются собственными значениями конечной кратности*[10]*.*

10.5. Самосопряженные операторы

Рассматриваемые ниже операторы предполагаются действующими в гильбертовом пространстве H.

10.5.1. Теорема. *Пусть в гильбертовом пространстве $Ax = \lambda x$, $A^* y = \mu y$ и $\lambda \neq \bar{\mu}$. Тогда $\langle x, y\rangle = 0$.*

[10] Имеется в виду конечная размерность собственных подпространств. Вообще говоря, как и в линейной алгебре, для собственных значений могут быть определены алгебраические и геометрические кратности, на чем мы не останавливаемся.

◀ Вычисление $\langle Ax, y\rangle$ двумя способами[11],

$$\langle Ax, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \bar{\mu}\langle x, y\rangle,$$

приводит к $\langle x, y\rangle = 0$ в силу $\lambda \neq \bar{\mu}$. ▶

Компактный самосопряженный оператор $A \neq 0$ обязательно имеет ненулевое собственное значение λ (лемма 11.3.2).

10.5.2. Теорема. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие* ***различным*** *собственным значениям, — ортогональны.*

◀ Умножение $Ax = \lambda x$ скалярно на x дает равенство

$$\langle Ax, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle,$$

в котором оба произведения $\langle Ax, x\rangle$ и $\langle x, x\rangle$ вещественны[12]. ▶

Наиболее плодотворен с точки зрения приложений следующий результат.

10.5.3. Теорема Гильберта—Шмидта. *Пусть A — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с нулевым ядром* ($\ker A = 0$)[13]. *Тогда в H существует ортонормированный базис $\{h_n\}$ из собственных векторов оператора A, в котором оператор имеет диагональный вид*

$$Ax = \sum_n \lambda_n x_n h_n, \tag{10.7}$$

где x_n — координаты вектора

$$x = \sum_n x_n h_n,$$

а λ_n — собственные значения, отвечающие векторам h_n.

◀ Упорядочим собственные значения оператора A в порядке убывания абсолютных величин: $|\lambda_1| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n| \geqslant \ldots$. По теореме 7.4.2 квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ достигает максимума (или минимума) на единичном шаре в некоторой точке $x = h_1$, а лемма 11.3.2 гарантирует $Ah_1 = \lambda_1 h_1$.

[11] Напомним, что $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, но $\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$.

[12] Ортогональность собственных векторов вытекает из теоремы 10.5.1.

[13] Т. е. $Ax \neq 0$ при $x \neq 0$.

Дальнейшее построение системы $\{h_n\}$ происходит по индукции. У подпространства L, натянутого на h_1, по теореме 7.1.2 существует ортогональное дополнение $L^\perp$. Поскольку L инвариантно относительно A, то и $L^\perp$ инвариантно[14], — поэтому сужение A на $L^\perp$ снова удовлетворяет условиям теоремы, и повторение предыдущего шага для $A_{L^\perp}$ дает $Ah_2 = \lambda_2 h_2$. После этого L натягивается на $\{h_1, h_2\}$ и так далее.

В результате возникает конечная или бесконечная ортонормированная система $\{h_n\}$. Если порожденное $\{h_n\}$ подпространство не совпадает с H, то в инвариантном подпространстве $L^\perp$ у A нет собственного вектора, что противоречит лемме 11.3.2. ►

Если допустить $\ker A \neq 0$, система $\{h_n\}$ будет базисом лишь в некотором подпространстве $L \subset H$. Любой вектор x будет раскладываться в сумму

$$x = \sum_n x_n h_n + v, \qquad v \in L^\perp,$$

а оператор A будет по-прежнему иметь диагональный вид (10.7).

В рамках предыдущего за бортом рассмотрения остаются неограниченные дифференциальные операторы, хотя понятно, что они-то как раз включены в теорию с достаточным комфортом. Дело в том, что обращение дифференциального оператора[15] обычно — есть вполне непрерывный интегральный оператор G. А если $Gh = \lambda h$, $h \neq 0$, то G^{-1} имеет собственное значение λ^{-1} и те же собственные векторы (см. *задачу Штурма—Лиувилля* в разделе 10.1). Поэтому *теорема Гильберта—Шмидта* косвенно охватывает многие практически важные дифференциальные операторы.

10.6. Операторные функции

Теория матричных функций типа e^A естественно переносится в функциональные пространства.

Полином $\gamma_0 I + \gamma_1 A + \ldots + \gamma_1 A^k$ дает простейший пример операторной функции.

---

[14] Из $u \in L$, $v \in L^\perp$ следует $\langle Av, u\rangle = \langle v, Au\rangle = 0$.

[15] Дифференциальный оператор представляет собой некоторое соотношение между производными плюс краевые условия, без которых интегрирование дифференциальных уравнений неоднозначно.

Если оператор A имеет собственные значения λ_j, которым отвечают собственные векторы x_j, то полином

$$p(A) = A^n + \gamma_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \gamma_0 I$$

имеет собственные значения $p(\lambda_j)$ и те же собственные векторы x_j.

◀ Применяя к $Ax_j = \lambda_j x_j$ оператор A, получаем

$$A^2 x_j = \lambda_j A x_j = \lambda_j^2 x_j.$$

Продолжая аналогично, имеем

$$A^k x_j = \lambda_j^k x_j, \qquad (\alpha A^p + \beta A^q)x_j = (\alpha\lambda_j^p + \beta\lambda_j^q)x_j,$$

что в итоге дает $p(A)x_j = p(\lambda_j)x_j$. ▶

От полиномов стандартным образом осуществляется переход к рядам

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k A^k, \qquad A^0 = I. \tag{10.8}$$

Сходимость ряда (10.8) обычно определяют через сходимость частичных сумм

$$f_q(A) = \sum_{k=0}^{q} \gamma_k A^k \tag{10.9}$$

к $f(A)$, что оформляется стандартным образом. Ряд (10.8) сходится к $f(A)$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что $\|f(A) - f_q(A)\| < \varepsilon$ как только $q > N$.

◀ Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k \lambda^k$ сходится, что влечет за собой $\gamma_k\lambda^k \to 0$, а значит, и ограниченность: $|\gamma_k\lambda^k| < M$. Пусть $\|A\| < |\lambda|$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\gamma_k A^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k\lambda^k| \left|\frac{\|A\|}{\lambda}\right|^k < M \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\|A\|}{\lambda}\right|^k < \infty.$$

Следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k \|A\|^k$. Это означает, что частичные суммы $\sum\limits_{k=0}^{q} \gamma_k A^k$ представляют собой фундаментальную последовательность, поскольку

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} \gamma_k A^k \right\| \leqslant \sum_{k=p}^{q} \gamma_k \|A\|^k.$$

В итоге гарантирована сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k A^k$. ▶

Уточнение деталей приводит к следующему результату.

10.6.1. *Если спектральный радиус $\rho(A) < r$, где r — радиус сходимости ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \lambda^k,$$

то операторный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k A^k$$

сходится, определяя некоторую функцию $f(A)$.

Глава 11

Элементы нелинейного анализа

11.1. Нелинейные операторы

Нелинейный оператор $F : E_1 \to E_2$ называется *непрерывным* в точке $x \in E_1$, если

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|F(x_n) - F(x)\| \to 0;$$

слабо непрерывным [1], если

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \Rightarrow \quad F(x_n) \xrightarrow{w} F(x);$$

вполне непрерывным, если он непрерывен и ограниченные множества отображает в предкомпактные; наконец, *ограниченным на* Ω, если

$$\sup_{x \in \Omega} \|F(x)\| < \infty.$$

Отличия от линейного случая очевидны. Непрерывность в точке не гарантирует непрерывности во всем пространстве; норма оператора не определена; непрерывность в любой точке шара Ω и ограниченность на Ω не связаны друг с другом.

11.2. Производные и дифференциалы

Говорят, оператор $F : E_1 \to E_2$ *дифференцируем по Фреше* в точке $x \in E_1$, если существует линейный ограниченный оператор $F'_x : E_1 \to E_2$, называемый *производной Фреше* в точке x, — такой, что

$$F(x + h) - F(x) = F'_x h + \nu(x, h)$$

и $\dfrac{\|\nu(x,h)\|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

[1] В случае линейного оператора слабая непрерывность совпадает с обычной.

Линейная часть приращения $F'_x h$ называется *дифференциалом Фреше*. Опуская имя Фреше, пользуются также эквивалентными названиями: *сильная производная* и *сильный дифференциал*.

При дифференцируемости F в каждой точке $x \subset \Omega$ и непрерывности F'_x как оператора из Ω в $\mathcal{E}(E_1, E_2)$, оператор F называется *непрерывно дифференцируемым по Фреше* на Ω. О равномерной дифференцируемости на Ω говорят в случае, когда $\dfrac{\|\nu(x,h)\|}{\|h\|} \to 0$ равномерно по $x \in \Omega$.

• Для производной Фреше справедливы свойства, типичные для обычной производной: от «производной суммы равной сумме производных» вплоть до производной сложной функции,

$$(F(G(x)))' = F'_{G(x)} G'_x.$$

• Ретроспективный взгляд показывает, что суть дифференцируемости всегда сводится к возможности линейной аппроксимации

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = F'_x \Delta x + o(\|\Delta x\|).$$

В одномерном случае F'_x — обычная производная. Для функции n переменных внешне все остается тем же самым, но F'_x — становится градиентом, а $F'_x \Delta x$ — скалярным произведением. Для оператора $F(x)$, действующего в $\mathbb{R}^n$,

$$F(x) = \{F_1(x), \ldots, F_n(x)\},$$

тоже ничего не меняется, внешне. Разве что F'_x становится *матрицей Якоби*

$$F'_x = [\partial F_i / \partial x_j],$$

а в $F'_x \Delta x$ подразумевается умножение матрицы на вектор. В ТФКП требуется, чтобы F'_x было комплексным числом.

• Производная Фреше в шаре $\|x\| \leqslant r$ *интегрального оператора Урысона*

$$Fx(t) = \int_0^1 G[t, s, x(s)]\, ds$$

в случае непрерывности ядра $G[t, s, x]$ по совокупности переменных и непрерывной дифференцируемости по x определяется выражением

$$F'_x \Delta x(t) = \int_0^1 G'_x[t, s, x(s)]\Delta x(s)\, ds,$$

как в C, так и в L_p.

Слабым дифференциалом, или *дифференциалом Гато*, называют предел (по норме)

$$\delta F(x, h) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(x + \tau h) - F(x)}{\tau}.$$

Слабый дифференциал называют также *вариацией* F.

Если предел $\delta F(x, h)$ оказывается линейным по h,

$$\delta F(x, h) = F'_x h,$$

оператор F'_x называют *производной Гато* (*слабой производной*) в точке x.

Производная Фреше, если существует, является производной Гато. Обратную импликацию обеспечивает требование непрерывности производной Гато по x.

Совсем просто устанавливается следующий результат. (?)

11.2.1. Теорема. *Производная Фреше вполне непрерывного оператора — вполне непрерывна.*

Если $F'_x : E_1 \to \mathcal{E}(E_1, E_2)$ дифференцируем по Фреше в точке x, то оператор F называется *дважды дифференцируемым по Фреше* в точке x. Аналогично определяются производные n-го порядка, и по той же схеме, что и в классическом анализе, $F(x)$ разлагается в *ряд Тэйлора*:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Формула конечных приращений

$$F(x) - F(y) = (x - y) \int_0^1 F'[y + \tau(x - y)]\, d\tau$$

получается интегрированием от 0 до 1 очевидного тождества

$$\frac{d}{d\tau} F[y + \tau(x - y)] = F'[y + \tau(x - y)](x - y).$$

Отсюда ясно, что при равномерной ограниченности производной F' на выпуклом множестве Ω оператор F удовлетворяет на Ω *условию Липшица*:

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant L\|x - y\|, \qquad L > 0.$$

11.3. Градиент функционала

Производная Фреше нелинейного оператора $F : E_1 \to E_2$ — это оператор F'_x, действующий, как функция от x, из E_1 в $\mathcal{E}(E_1, E_2)$.

В частном случае нелинейного функционала $\varphi : E \to \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{E}(E, \mathbb{R})$ есть E^*. Поэтому производная Фреше $\varphi'(x)$ функционала $\varphi(x)$ — это вектор из E^*,

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \langle \varphi'(x), \Delta x\rangle + o(\|\Delta x\|),$$

который называют *градиентом Фреше* функционала $\varphi(x)$ в точке x и обозначают как $\nabla\varphi(x)$, либо $\operatorname{grad}\varphi(x)$.

Если функционал $\varphi : E \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируем по Фреше в точке x, то его вторая производная называется *гессианом* функционала φ в точке x и обозначается через $\nabla^2\varphi(x)$. Гессиан функционала φ — это оператор из E в $\mathcal{E}(E, E^*)$.

Функционал $\varphi : E \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато* в точке x, если существует такой линейный ограниченный функционал $f \in E^*$, называемый *градиентом Гато*, что для любого $h \in E$

$$\varphi(x + th) - \varphi(x) = t\langle f, h\rangle + o(t).$$

Градиент Гато и градиент Фреше обозначаются одинаково: $\nabla\varphi(x)$ — различие возлагается на контекст. А если существуют оба градиента, то они совпадают, — и в этом случае говорят просто о градиенте.

• Градиент функционала $\varphi(x) = \langle x, x\rangle$ в гильбертовом пространстве H определяется равенством $\varphi'(x)h = 2\langle x, h\rangle$, а градиент $\psi(x) = \langle Ax, x\rangle$, где A самосопряженный оператор, — равенством $\psi'(x)h = 2\langle Ax, h\rangle$.

• Следующий результат устанавливается так же легко, как и в случае скалярной функции.

11.3.1. Лемма. *Необходимым условием достижения функционалом $\varphi(x)$ в точке x_0 локального максимума или минимума является*[2] *обращение в нуль градиента $\nabla\varphi(x_0)$.*

◄ Из

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \langle\nabla\varphi(x), x - x_0\rangle + o(\|x - x_0\|)$$

ясно, что при $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$ в сколь угодно малой окрестности x_0 нашлись бы точки, в которых функционал принимал бы значения разных знаков. ►

• Задачи на условный максимум, как и в обычном анализе, решаются методом множителей Лагранжа. Вот частный случай.

11.3.2. Лемма. *Квадратичная форма $\langle Ax, x\rangle$ с компактным самосопряженным оператором A достигает максимума (и минимума) на единичной сфере в точке x_0, в которой $Ax_0 = \lambda x_0$. Если $A \neq 0$, то $\lambda \neq 0$.*

◄ Максимум достигается в некоторой точке x_0 по теореме 7.4.2. Равенство $Ax_0 = \lambda x_0$ вытекает из предыдущей леммы.

Сужение $\tilde{A}$ оператора A на $[\ker A]^{\perp}$ — невырожденный оператор. Поэтому из $\tilde{A}x_0 = \lambda x_0$ следует $\lambda \neq 0$. ►

11.4. Принцип сжимающих отображений

Ряд принципиальных математических проблем сводится к разрешимости уравнения

$$x = F(x), \qquad (x \in X). \tag{11.1}$$

[2] Разумеется, речь идет о дифференцируемом функционале.

Точку x^*, удовлетворяющую (11.1), называют *неподвижной точкой* оператора F.

11.4.1. *Отображение F, действующее в метрическом пространстве (X,ρ), называется сжимающим (сжатием), если существует такое $\lambda < 1$, что*

$$\rho(F(x),F(y)) \leqslant \lambda\rho(x,y) \quad \text{для любых} \quad x,y \in X. \tag{11.2}$$

11.4.2. Теорема. *Всякое сжимающее отображение F, действующее в полном метрическом пространстве, имеет неподвижную точку x^*, которая единственна. Последовательные приближения*

$$x^{k+1} = F(x^k)$$

сходятся к x^* независимо от x^0.

◄ Покажем, что любая последовательность x^k, определяемая итерациями $x^{k+1} = F(x^k)$, является последовательностью Коши. Очевидно,

$$\rho(x^n,x^m) \leqslant \rho(x^n,F(x^n)) + \rho(F(x^n),F(x^m)) + \rho(F(x^m),x^m),$$

т.е.

$$\rho(x^n,x^m) \leqslant \varphi(x^n) + \lambda\rho(x^n,x^m) + \varphi(x^m),$$

где $\varphi(x) = \rho(x,F(x))$.

Следовательно,

$$\rho(x^n,x^m) \leqslant \frac{\varphi(x^n)+\varphi(x^m)}{1-\lambda} \to 0 \qquad (n,m\to\infty).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\varphi(x)$ на любой последовательности $x^{k+1} = F(x^k)$ убывает до нуля, поскольку из (11.2) вытекает $\varphi(x^{k+1}) \leqslant \lambda\varphi(x^k)$.

Остается заметить, что пространство (X,ρ) полно. Поэтому $x_k \to x^*$. В силу (11.2) оператор F непрерывен. Следовательно, $x^* = F(x^*)$. Двух неподвижных точек быть не может, благодаря тому же неравенству (11.2). ►

При ослаблении условия (11.2) до

$$\rho(F(x),F(y)) < \rho(x,y) \quad \text{для любых} \quad x,y \in X \tag{11.3}$$

теорема 11.4.1 перестает быть верной. Функция $F(x) = x + e^{-x}$ отображает $[1,\infty)$ в себя и удовлетворяет (11.3), но неподвижной точки не имеет.

- Если X компактно, то из (11.3) следует (11.2). (**?**)

Равномерное сжатие. Отображение двух переменных $F(x, w)$, действующее из X в X при каждом фиксированном $w \in W$ и удовлетворяющее условию

$$\rho(F(x, w), F(y, w)) \leqslant \lambda\rho(x, y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in X, \ w \in W, \tag{11.4}$$

где $\lambda < 1$ и не зависит от w, назовем *равномерным сжатием*.

11.4.3. Теорема. *Если отображение $F(x, w)$ является равномерным сжатием и непрерывно по w, то решение $x^*(w)$ уравнения $x = F(x, w)$ непрерывно.*

◄ Существование решения $x^*(w)$ при каждом w вытекает из теоремы 11.4.2. В силу (11.4)

$$\rho\{x^*(u), x^*(w)\} = \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(w), w)\} \leqslant$$
$$\leqslant \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(u), w)\} + \rho\{F(x^*(u), w), F(x^*(w), w)\} \leqslant$$
$$\leqslant \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(u), w)\} + \lambda\rho\{x^*(u), x^*(w)\},$$

откуда

$$\rho\{x^*(u), x^*(w)\} \leqslant (1 - \lambda)^{-1}\rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(u), w)\}. \quad ►$$

11.5. Теорема о неявной функции

Пусть $\Phi : X \times Y \to Z$ — непрерывное отображение, где X, Y, Z — банаховы пространства. Уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{11.5}$$

назовем *локально разрешимым* в точке (x_0, y_0), если $\Phi(x_0, y_0) = 0$ и в некоторой окрестности этой точки уравнение $\Phi(x, y) = 0$ однозначно определяет *неявную функцию* $x(y)$, тождественно удовлетворяющую соотношению $\Phi(x(y), y) \equiv 0$.

11.5.1. Теорема. *Пусть $\Phi(x_0, y_0) = 0$ и производная Фреше Φ'_x непрерывна (по норме оператора) в точке (x_0, y_0), а линейный оператор $\Phi'_x(x_0, y_0)$ непрерывно обратим. Тогда уравнение (11.5) локально разрешимо в точке (x_0, y_0).*

◄ Заменим (11.5) эквивалентным уравнением $x = F(x, y)$, где оператор

$$F(x, y) = x - [\Phi'_x(x_0, y_0)]^{-1}\Phi(x, y),$$

как легко убедиться, удовлетворяет условиям теоремы 11.4.3.

Действительно, производная

$$F'_x(x,y) = I - [\Phi'_x(x_0,y_0)]^{-1}\Phi'_x(x,y)$$

непрерывна и $F'_x(x_0,y_0) = 0$. Поэтому в окрестности, определяемой неравенствами $\|x - x_0\| \leqslant \gamma$, $\|y - y_0\| \leqslant \gamma$, при достаточно малом $\gamma > 0$ имеет место $\|F'_x(x,y)\| < \lambda < 1$. Наконец,

$$F(x_0,y_0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \|F(x_0,y) - x_0\| \leqslant (1-\lambda)\gamma$$

при $\|y - y_0\| \leqslant \alpha$ и достаточно малом $\alpha \leqslant \gamma$, откуда следует, что $F(x,y)$ при $\|y - y_0\| \leqslant \alpha$ преобразует шар $\|x - x_0\| \leqslant \gamma$ в себя. Далее остается применить теорему 11.4.3. ►

11.6. Принцип Шаудера

В $\mathbb{R}^n$ общеизвестен следующий принцип неподвижной точки.

11.6.1. Теорема Брауэра. *Если непрерывный оператор T отображает в себя замкнутый шар $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$, то уравнение $x = Tx$ разрешимо в $\overline{B}$.*

В томе по нелинейному анализу теорема Брауэра будет аккуратно изложена в рамках теории степени отображения[3]. Сам результат достаточно очевиден при некоторой переформулировке.

Например, интуитивно прозрачна невозможность *непрерывно продолжить* тождественное отображение сферы $S = \{x : \|x\| = 1\}$ на ограничиваемый ею шар $\overline{B} = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$. То есть — невозможность непрерывного отображения $F : \overline{B} \to S$, которое все точки сферы S оставляет на месте[4].

Отсюда всего один шаг до теоремы Брауэра. ◄ Допустим, существует непрерывное отображение $T : \overline{B} \to \overline{B}$, не имеющее неподвижных точек, $T(x) \neq x$ для любого $x \in \overline{B}$. Соединим x и $T(x)$ отрезком прямой и продолжим его за точку x до пересечения со сферой S в некоторой точке $F(x)$. Тогда $F : \overline{B} \to S$ будет тем самым «невозможным» отображением. ►

Прямолинейное обобщение теоремы 11.6.1 на бесконечномерный случай принципиально не проходит. Нужны дополнительные предположения.

11.6.2. Принцип Шаудера. *Если вполне непрерывный оператор T, действующий в банаховом пространстве, отображает в себя шар $\overline{B}$, то в $\overline{B}$ существует неподвижная точка оператора, т. е. уравнение $x = Tx$ разрешимо в $\overline{B}$.*

---

[3] См. также [3, т. 1], глава «Топология и неподвижные точки», где проблематика изложена на качественном уровне.

[4] Невозможность, деформируя внутренность резинового шара, распластать его по границе, не разрывая (граничные точки на сфере фиксированы).

◄ Вполне непрерывный оператор $T : E \to E$ на ограниченном множестве $\overline{B}$ можно сколь угодно точно аппроксимировать конечномерным оператором T_ε таким, что $\|T(x) - T_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ для любого $x \in \overline{B}$.

Оператор T_ε задается конструктивно с помощью *проектора Шаудера*

$$P_\varepsilon(x) = \frac{\mu_1(x)z_1 + \ldots + \mu_k(x)z_k}{\mu_1(x) + \ldots + \mu_k(x)}, \qquad x \in \overline{B},$$

где $z_1, \ldots, z_k$ — конечная ε-сеть компакта $T(\overline{B})$, а

$$\mu_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - z_j\|, & \text{если} \quad \|x - z_j\| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \text{если} \quad \|x - z_j\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко видеть, что оператор $T_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(T(x))$ непрерывен, конечномерен, отображает конечномерный шар в себя и — по теореме Брауэра — имеет неподвижную точку $\overset{\circ}{x}_\varepsilon$. В силу полной непрерывности $\overset{\circ}{x}_\varepsilon$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к неподвижной точке оператора T. ►

11.7. Собственные векторы

Нелинейные принципы неподвижной точки способствуют решению линейных параметрических уравнений $Ax = \lambda x$, связанных с вопросами существования собственных значений и векторов.

Остановимся предварительно на приспособлении инструментов.

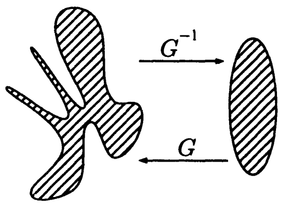


Рис. 1

Обобщения теорем Брауэра и Шаудера. Элементарным образом теорема Брауэра обобщается на случай множества $\overline{\Omega}$, гомеоморфного замкнутому шару $\overline{B}$.

◄ Пусть оператор T переводит в себя $\overline{\Omega}$, и $G : \overline{B} \to \overline{\Omega}$ — гомеоморфизм (рис. 1). В этом случае оператор $G^{-1}TG$ отображает в себя шар и по теореме 11.6.1 имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{B}$, т. е. $G^{-1}TG(x^*) = x^*$. Но тогда $TG(x^*) = G(x^*)$, следовательно, $y^* = G(x^*) \in \overline{\Omega}$ — неподвижная точка оператора T. ►

Возможности обобщения этим не исчерпываются. Неподвижную точку обязано иметь непрерывное отображение *ретракта*[5)] замкнутого выпуклого тела в себя. Это сильно раздвигает горизонты, но для дальнейшего достаточно более скромное обобщение теорем 11.6.1, 11.6.2.

[5)] $Y \subset X$ — ретракт X, если существует непрерывное отображение $T : X \to Y$, оставляющее все точки $Y \subset X$ на месте.

11.7.1. Теорема. *Если непрерывный оператор T в $\mathbb{R}^n$ либо вполне непрерывный в банаховом пространстве E — отображает в себя множество Ω, гомеоморфное ограниченному замкнутому выпуклому множеству*[6]*, то уравнение $x = Tx$ разрешимо в Ω.*

Пример положительной матрицы $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} > 0$. Нелинейный оператор

$$T(x) = Ax/\|Ax\|$$

в случае $\|x\| = \sum\limits_j |x_j|$ отображает в себя выпуклый симплекс $\sum\limits_j x_j = 1$, все $x_j \geqslant 0$, и по теореме 11.7.1 имеет неподвижную точку,

$$Ax^\circ/\|Ax^\circ\| = x^\circ,$$

т. е. x° — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda = \|Ax^\circ\|$.

В случае другой нормы в себя отображалось бы не обязательно выпуклое множество, но гомеоморфное тому же симплексу.

По аналогичной схеме могут рассматриваться положительные вполне непрерывные операторы, оставляющие инвариантным некоторый конус $K \subset E$ (глава 12).

[6] Не обязательно телесному.

Глава 12

Положительные операторы

Далее речь идет о бесконечномерных аналогах теории положительных матриц, основанных на *конусных методах*. Обобщения, как правило, утрачивают потенциал источника. Данный случай — исключение. Конусные методы эффективны, изящны и достаточно просты. Где изложение превращается в рассказ, подробности можно найти в [12, 13].

12.1. Конусы в банаховых пространствах

Пусть E — банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если для любого ненулевого $x \in K$

$$\lambda x \in K \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda x \notin K \quad \text{при} \quad \lambda < 0.$$

Иначе говоря, конус обязан быть замкнутым, выпуклым и содержать вместе с любой ненулевой точкой $x \in K$ луч, проходящий через эту точку, но не содержать никакую прямую, проходящую через x.

Примеры конусов: *неотрицательный ортант* $\mathbb{R}^n_+$ в $\mathbb{R}^n$; *конусы неотрицательных функций* K_+ в C и L_p; конус выпуклых на $[0, 1]$ функций с «нулевыми концами», $x(0) = x(1) = 0$. Неограниченное число примеров дает следующий метод построения конусов. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое ограниченное множество, не содержащее нуля. Тогда совокупность $K(\Omega)$ элементов $x \in \mathbb{R}^n$, допускающих представление

$$x = \alpha z, \qquad \alpha \geqslant 0,\ z \in \Omega,$$

является конусом. (?) Метод представляется достаточно общим, но, как будет видно из дальнейшего, в бесконечномерных пространствах чаще всего не работает.

Конус определяет в E *полуупорядоченность*: $x \geqslant y$ (равносильно $y \leqslant x$), если $x - y \in K$. Такие неравенства, как и обычные, можно умножать на неотрицательные числа; складывать одноименные; переходить к пределам [1];

$$x \leqslant y,\ y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z; \qquad x \leqslant y,\ y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Этим, пожалуй, общность исчерпывается. Набор свойств знака $\geqslant$ существенно богаче. Например, ограниченная монотонная ($x_{k+1} \geqslant x_k$) числовая последовательность $\{x_k\}$ обязательно сходится. Но последовательность, монотонная в смысле $x_{k+1} \geqslant x_k$, будь она ограниченной хоть по норме, хоть по конусу (все $x_k \leqslant z$), — в общем случае не обязана сходиться.

Подобных примеров существует много. В то же время ясно, что в каждом конкретном случае специфика используемого конуса может обеспечивать наличие дополнительных полезных свойств у отношения $\leqslant$. Это соображение служит источником интереса к изучению разновидностей конусов [2].

Ограниченность по конусу и миниэдральность. Множество $\Omega \subset E$ *ограниченно по конусу* сверху, если $x \leqslant y$ для всех $x \in \Omega$ и некоторого элемента $y \in E$, который называют *верхней границей* Ω. Аналогично определяется — *нижняя граница*.

Если в множестве P верхних границ множества Ω есть наименьший элемент z_0 ($z_0 \leqslant z$, $z \in P$), то он называется *точной верхней границей* множества Ω и обозначается через $\sup \Omega$. Аналогично определяется *точная нижняя граница* $\inf \Omega$.

Конус K называется *миниэдральным*, если любое множество из двух элементов $\{x, y\}$ имеет точную верхнюю границу $\sup\{x, y\}$. Если же точная верхняя граница имеется у каждого ограниченного множества, то конус называется *сильно миниэдральным*.

Конус K_+ в C миниэдрален, в L_p — сильно миниэдрален. Сильно миниэдральны ортанты в $\mathbb{R}^n$. «Круглые» конусы $K(\Omega)$ (см. выше) — не миниэдральны [3].

Элементы конуса K считаются *положительными*. Множество

$$[u, v] = \{x \in E : u \leqslant x \leqslant v\}$$

называют *конусным отрезком*.

---

[1] В том числе — к слабым.

[2] Помимо непосредственного предназначения разновидности конусов служат хорошим тренажером, демонстрируя разнообразие свойств банаховых пространств. Существенно более подробную информацию о конусах и конусных методах можно найти в [13].

[3] И уж тем более — не сильно миниэдральны.

Нормальные и правильные конусы. Конус K называется *нормальным*, если из $0 \leqslant x \leqslant y$ следует $\|x\| \leqslant N(K)\|y\|$, и константа $N(K)$ не зависит от x и y. Наименьшее из чисел $N(K)$, для которых выполнено неравенство, называется *константой нормальности конуса*.

Нормальность конуса равносильна отсутствию в K элементов, которые «почти противоположно направлены». Точнее, *конус* K *нормален в том и только том случае, когда существует такое* $\delta > 0$, *что* $\|e_1 + e_2\| \geqslant \delta$ *для любых единичных векторов* $e_1, e_2 \in K$.

Другое *характеристическое свойство* нормального конуса: *из сходимости крайних последовательностей в* $v_n \leqslant x_n \leqslant w_n$ *к общему пределу следует сходимость* x_n *к тому же пределу.*

Все конусы в $\mathbb{R}^n$ нормальны. Конусы K_+ неотрицательных функций в C, L_p также нормальны. В пространстве C^1 (непрерывно дифференцируемых функций) конус K_+ свойством нормальности не обладает.

Конус, содержащий внутренние точки, считается *телесным*. Конус называется *воспроизводящим*, если каждый элемент $x \in E$ представи́м в виде

$$x = u - v \qquad (u, v \in K).$$

Всякий телесный конус является воспроизводящим. Конус K_+ в C телесен, в L_p — воспроизводящий, но не телесный.

О последовательности $\{x_n\} \subset E$,

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots,$$

говорят как о *возрастающей* (или *неубывающей*). Неубывающие и невозрастающие последовательности характеризуются как *монотонные*.

Конус K называется *правильным*, если любая неубывающая ограниченная по конусу последовательность сходится по норме, и — *вполне правильным*, если сходятся по норме неубывающие ограниченные *по норме* последовательности.

Правильные конусы нормальны, вполне правильные — правильны. Телесный правильный конус вполне правилен. Вполне правильны также правильные конусы в слабо полных пространствах. Конус K_+ в L_p вполне правилен.

В случае $f(x) \geqslant 0$ при $x \in K$ линейный функционал $f \in E^*$ называется *положительным*. Если линейная оболочка K плотна в E (например, K воспроизводящий), то множество положительных функционалов образует *сопряженный конус* $K^* \subset E^*$.

Линейные положительные функционалы всегда существуют. Более того, для каждого ненулевого $x_0 \geqslant 0$ можно указать такой положительный линейный непрерывный функционал $f(x)$, что $f(x_0) > 0$. А в случае сепарабельного пространства E существуют (линейные непрерывные) функционалы, строго положительные на всех ненулевых $x \in K$.

Точка x называется *квазивнутренним элементом конуса* K, если $f(x) > 0$ для любого ненулевого функционала $f \in K^*$.

12.2. Положительные операторы

Тот факт, что пространство E полуупорядочено некоторым конусом, может эффективно использоваться при изучении оператора F, действующего в E, лишь в том случае, когда F обладает теми или иными свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Оператор $F : E \to E$ (не обязательно линейный) называется *положительным*, если $F(K) \subset K$; *монотонным*, если

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad F(x) \leqslant F(y).$$

Для линейных операторов положительность эквивалентна монотонности.

Если $\mathbb{R}^n$ полуупорядочено неотрицательным ортантом, то линейный оператор положителен, когда у определяющей его матрицы неотрицательны все элементы. Интегральные операторы при полуупорядоченности с помощью K_+ положительны при положительном ядре (детали подразумеваются).

Пространство E_u. Пусть фиксирован ненулевой элемент $u \in K$. Вектор $x \in E$ называется *u-измеримым*, если существует такое $\gamma > 0$, что

$$-\gamma u \leqslant x \leqslant \gamma u. \tag{12.1}$$

Наименьшее в (12.1) γ называется *u-нормой* x — пишут $\|x\|_u$. Множество u-измеримых элементов обозначается через E_u.

При $u(t) \equiv 1$ и полуупорядоченности «K_+» в случае C^1 пространство E_u совпадает с C^1, а u-норма — с нормой C. В случае L_p пространство E_u (с u-

нормой) совпадает с L_∞, наконец, в случае C «ничего не меняется», $E_u = C$. Если же $u(t) = t(1-t)$, то E_u представляет собой совокупность таких функций $x(t)$, что $|x(t)| \leqslant \gamma t(1-t)$, $\gamma > 0$.

Упражнения

Если конус K нормален, то:

1) пространство E_u полно по u-норме;
2) сходимость по u-норме влечет за собой сходимость по исходной норме пространства E;
3) множество $K_u = K \cap E_u$ есть нормальный телесный конус в пространстве E_u.

Одной положительности оператора бывает недостаточно, как недостаточно неотрицательности матриц, скажем, для теоремы Перрона. Следующее понятие направляет теорию в более конструктивное русло.

Линейный оператор A называется *u-положительным*, если некоторая его итерация переводит ненулевые $x \in K$ в $K(u)$, где $K(u)$ обозначает множество ненулевых $x \in K$, удовлетворяющих неравенству

$$\alpha u \leqslant x \leqslant \beta$$

при некоторых $\alpha, \beta > 0$.

Если конус K телесен и u внутренний элемент K, то u-положительный оператор называют *сильно положительным*.

Итерационный процесс

$$x_{k+1} = F(x_k)$$

с монотонным оператором F обладает следующим характерным свойством. Если точка x_0 под действием оператора F *идет вперед* (*назад*), т. е. $F(x_0) \geqslant x_0 \quad (\leqslant x_0)$, то вся последовательность x_k монотонно возрастает (убывает),

$$x_0 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant \ldots \qquad (x_0 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant \ldots),$$

что сразу вытекает из применения к неравенству $x_k \geqslant x_{k-1}$ оператора F, в результате чего $x_{k+1} \geqslant x_k$ и т. д.

Если теперь есть две точки $v_0 \leqslant w_0$, «меньшая» из которых идет вперед, а «бóльшая» — назад, то для

$$v_{k+1} = F(v_k), \qquad w_{k+1} = F(w_k)$$

имеем

$$v_0 \leqslant \ldots \leqslant v_k \leqslant \ldots w_k \leqslant \ldots \leqslant w_0.$$

Обе последовательности v_k, w_k оказываются монотонными и ограниченными по конусу, и в случае непрерывного F и правильного конуса сходятся к неподвижным точкам $v^* = F(v^*)$, $w^* = F(w^*)$. А если F имеет лишь одну неподвижную точку x^*, то любая последовательность x_k процесса $x_{k+1} = F(x_k)$ при условии $v_0 \leqslant x_0 \leqslant w_0$ оказывается зажата в тиски,

$$v_k \leqslant x_k \leqslant w_k,$$

и потому тоже сходится, $x_k \to x^*$.

12.3. Оценки спектрального радиуса

Напомним, что спектральный радиус $\rho(A)$ определяется как наименьший радиус круга[4], содержащего весь спектр оператора A.

Линейное уравнение $\lambda x = Ax + y$ при $|\lambda| > \rho(A)$ имеет единственное решение $x = (\lambda I - A)^{-1} y$, являющееся пределом последовательных приближений $\lambda x_{n+1} = Ax_n + y$ при любом исходном $x_0 \in E$. Сходимость последовательных приближений в данном случае равносильна сходимости к решению *ряда Неймана*:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n y. \tag{12.2}$$

Можно утверждать также обратное: если ряд Неймана сходится при любых $y \in E$ и $|\lambda| > \alpha$, то $\rho(A) \leqslant \alpha$.

Точное вычисление спектрального радиуса удается только в задачниках. По этой причине важную роль играют теоремы об оценках спектрального радиуса. Особенно удобные и эффективные приемы таких оценок существуют для положительных операторов.

12.3.1. Теорема. *Пусть для линейного положительного оператора A и ненулевого элемента $x_0 \in K$ выполняется неравенство*

$$Ax_0 \geqslant \gamma x_0.$$

Тогда $\rho(A) \geqslant \gamma$.

---

[4] На комплексной плоскости, с центром в нуле.

◀ Обозначим через x_ε решение уравнения

$$(\rho(A)+\varepsilon)x = Ax + y, \quad \varepsilon > 0, \quad y \gg x_0.$$

Поскольку все элементы $A^n y$ положительны, то x_ε, представимое рядом Неймана, также положительно, а значит, положительно Ax_ε. Поэтому

$$(\rho(A)+\varepsilon)x_\varepsilon \gg y \gg x_0 \quad \text{и} \quad (\rho(A)+\varepsilon)x_\varepsilon \gg Ax_\varepsilon. \tag{12.3}$$

Применяя к первому неравенству (12.3) оператор A (заметим, что линейный положительный оператор монотонен) и пользуясь вторым неравенством (12.3) и условием $Ax_0 \gg \gamma x_0$, получаем $x_\varepsilon \gg \gamma(\rho(A)+\varepsilon)^{-2}x_0$. Продолжая этот процесс, приходим к неравенствам

$$x_\varepsilon \gg \gamma^{n-1}(\rho(A)+\varepsilon)^{-n}x_0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда вытекает ограниченность при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ последовательности $\gamma^{n-1}(\rho(A)+\varepsilon)^{-n}$, что в итоге влечет за собой $\rho(A) \geqslant \gamma$. ▶

Аналогичная оценка спектрального радиуса по обратному неравенству

$$Ax_0 \leqslant \gamma x_0, \quad x_0 \in K, \quad x_0 \neq 0, \tag{12.4}$$

в общем случае не имеет места, но в достаточно свободных предположениях (12.4) влечет за собой $\rho(A) \leqslant \gamma$.

Пусть, например, K — нормальный воспроизводящий конус, а оператор A *x_0-ограничен сверху*[5]. Из (12.4) вытекает, что оператор $B = \dfrac{1}{\gamma}A$ преобразует в себя конусный отрезок $[-x_0, x_0]$. Поэтому при любом $y \in [-x_0, x_0]$ нормы элементов $B^n y$ ограничены в совокупности, что влечет за собой сходимость рядов Неймана (12.2) при $|\lambda| > \gamma$. А поскольку оператор A *x_0-ограничен сверху*, то ограниченными по норме будут также элементы $B^n y$ при любом $y \in E$. Следовательно, ряды Неймана (12.2) сходятся при любых $|\lambda| > \gamma$ и $y \in E$, что приводит к $\rho(A) \leqslant \gamma$.

Возможны и другие вариации предположений. Часть из них собрана в следующем утверждении.

12.3.2. Теорема. *Пусть линейный положительный оператор A удовлетворяет неравенству* (12.4) *и выполняется одно из условий*:

---

[5] Положительный оператор F называется *x_0-ограниченным сверху*, если для любого ненулевого $x \in K$ можно указать такие m и $\alpha > 0$, что $F^m(x) \leqslant \alpha x_0$.

1. *K — нормальный воспроизводящий конус, оператор A x_0-ограничен сверху.*
2. *Оператор A вполне непрерывен, x_0 — квазивнутренний элемент K.*
3. *K — нормальный телесный конус, x_0 — внутренний элемент K.*

Тогда $\rho(A) \leqslant \gamma$.

Использование положительных операторов в качестве *минорант* и *мажорант* дает удобные оценки спектрального радиуса в общем случае. Вот один из таких результатов.

12.3.3. Теорема. *Пусть линейный оператор A положителен на нормальном воспроизводящем конусе и линейный оператор B удовлетворяет условию*

$$-Ax \leqslant Bx \leqslant Ax, \quad x \in K.$$

Тогда $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

12.4. Позитивный спектр

Если уравнение

$$Ax = \lambda x$$

с линейным положительным оператором A имеет при некотором $\lambda = \lambda_0 > 0$ ненулевое решение (собственный вектор) $x_0 \in K$, то λ_0 называют *позитивным собственным значением*. Если при этом остальной спектр $\sigma(A)$ содержится в круге радиуса $r < |\lambda_0|$, — λ_0 называется *ведущим собственным значением*. Понятно, что в этом случае $\lambda_0 = \rho(A)$.

Камертоном теории линейных положительных операторов служит эталон положительных матриц.

12.4.1. Теорема Перрона. *Пусть матрица $A = [a_{ij}]$ строго положительна (все $a_{ij} > 0$). Тогда:*

- *Спектральный радиус $\rho(A) > 0$ является собственным значением алгебраической кратности единица, и ему отвечает строго положительный собственный вектор.*
- *Других положительных собственных значений и векторов матрица A не имеет.*
- *Если $Ax = \lambda x$, $\lambda \neq \rho(A)$, $x \neq 0$, то $|\lambda| < \rho(A)$.*

Формулировкам *теоремы Перрона* в различных источниках присущ определенный зазор предположений и выводов. Ослабление требования строгой положительности $A > 0$ приходится чем-то компенсировать, например, неразложимостью[6], что достигает цели лишь частично.

12.4.2. *Если матрица $A \geqslant 0$ неразложима, то $\rho(A) > 0$ является собственным значением алгебраической кратности* 1, *которому отвечает строго положительный собственный вектор. Других положительных собственных значений и векторов у A нет.*

Однако у A могут быть другие собственные значения λ, равные по модулю $\rho(A)$, — и возникает проблема изучения *периферического спектра*: собственных значений $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, равных по модулю $\rho(A)$. Такие матрицы называются *импримитивными* и характеризуются определенным сюрпризом: все периферические λ_j обязаны иметь вид $\omega_j \rho(A)$, где ω_j комплексные корни k-й степени из 1.

Обобщение теоремы Перрона в функциональных пространствах рассыпается на отдельные ручейки. В первую очередь обычно предъявляется следующий результат.

12.4.3. Теорема[7]. *Если конус K нормальный и воспроизводящий, то у любого положительного оператора*[8] *A число $\rho(A)$ является точкой его спектра.*

Результат, безусловно, краеугольный, но удовольствие — чисто эстетическое. Дело в том, что без дополнительной атрибутики принадлежность $\rho(A)$ спектру — мало что дает. Для практического использования важны дополнительные обстоятельства. Чтобы у собственного значения $\lambda_0 = \rho(A)$ существовал положительный собственный вектор $x_0 \neq 0$ и остальной спектр лежал в круге радиуса, строго меньшего $\rho(A)$. Тогда от созерцания можно переходить к целенаправленной деятельности.

Например, с помощью простых итераций вида $x_{k+1} = Ax_k$ можно получить сколь угодно точную оценку спектрального радиуса. Если не вникать в детали, причина заключается в следующем. Пространство E (например, L_2) распадается в сумму $E_1 \oplus E_2$, где одномерное E_1 натянуто на собственный вектор x_0; оператор же

---

[6] Матрица A называется *неразложимой*, если одинаковой перестановкой строк и столбцов она не может быть приведена к виду $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, где A_{11} и A_{22} квадратные матрицы.

[7] Вехи на пути к окончательной формулировке: *Крейн М. Г., Рутман М. А.* // УМН. 1948. **3**. № 1. С. 3–95; *Bonsall F.* // Proc. London Math. Soc. **3**. № 8. P. 53–75; *Karlin S.* // J. Math. Mech. 1959. **8**. № 6. P. 907–937. Достаточно короткое доказательство имеется в [13].

[8] Линейность и непрерывность (ограниченность) подразумеваются.

$B = \dfrac{1}{\lambda_0} A$ оказывается представи́м в виде суммы двух операторов B_1 и B_2, первый из которых действует в E_1 (причем $B_1 = I$), а второй — в E_2, причем B_2 имеет спектральный радиус строго меньший 1 (поскольку λ_0 — ведущее собственное значение) и потому сжимает в некоторой (эквивалентной) норме. В результате итерации $x_{k+1} = Ax_k$ сходятся по направлению к x_0, а отношение $\|x_{k+1}\|/\|x_k\|$ стремится в пределе к $\lambda_0 = \rho(A)$.

По этой причине ради гарантии существования положительного собственного вектора и наличия зазора между $\lambda_0 = \rho(A)$ и остальным спектром — общность предположений приносится в жертву.

12.4.4. Теорема. *Пусть линейный u-ограниченный оператор A вполне непрерывен и u-положителен. Тогда A имеет единственный положительный собственный вектор x_0, которому отвечает ведущее собственное значение $\lambda_0 > 0$.*

Теорема дает положительные ответы на основные вопросы, и — достаточна для большинства приложений. Предположения выглядят довольно жесткими, но они обычно выполняются на практике.

Рассмотрим в $C[\Omega]$ интегральный оператор с неотрицательным ядром на конечномерном компакте Ω:

$$Gx(t) = \int_{\Omega} G(t, s)x(s)\, ds. \tag{12.5}$$

Из теоремы 12.3.2 вытекает оценка

$$\rho(G) \leqslant \max_{t\in\Omega} \frac{1}{x_0(t)} \int_{\Omega} G(t, s)x_0(s)\, ds, \qquad x_0(t) > 0,$$

точность которой определяется выбором функции $x_0(t)$.

Помимо прямолинейного $x_0(t) \equiv 1$ имеет смысл

$$x_0(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\, ds.$$

При этом легко проверяется x_0-ограниченность оператора G, и в результате точность оценки повышается.

О характере достигаемых результатов удобно судить по ситуациям, где спектральный радиус точно вычисляется из других соображений. Такой пример дает обращение *задачи Штурма—Лиувилля*

$$x'' + \lambda x = 0, \qquad x(0) = x(1) = 0,$$

приводящее к интегральному оператору G вида (12.5) с ядром

$$G(t,s)=\begin{cases} t(1-s), & \text{если} \quad t\leqslant s;\\ s(1-t), & \text{если} \quad s\leqslant t, \end{cases}$$

который вполне непрерывен, x_0-положителен и x_0-ограничен при выборе в качестве $x_0(t)=t(1-t)$.

Вычисления показывают [12]: $Gx_0\leqslant 0{,}1041x_0$, $G^2x_0\leqslant 0{,}1016x_0$, что приводит (по теореме 12.3.2) к довольно точным оценкам: $\rho(G)\leqslant 0{,}1041$, $\rho(G)\leqslant 0{,}1016$, — в сравнении с $\rho(G)=1/\pi^2\approx 0{,}1013$.

Теорема 12.4.4 опосредованно гарантирует, что последующие итерации оператора G могут обеспечить сколь угодно точные оценки ведущего собственного значения $\lambda_0=\rho(G)$ и отвечающего ему собственного вектора.

◀ Что касается доказательства теоремы 12.4.4, то существование собственного вектора вытекает из полной непрерывности оператора — см. теорему 11.7.1 и ее обсуждение.

Отсутствие на окружности радиуса $\rho(A)$ других собственных значений связано с u-положительностью оператора, которая исключает возможность существования в конусе (см. теорему 12.4.5) других собственных векторов, кроме x_0,

$$Ax_0=\rho(A)x_0.$$

Но тогда оператор λA при любом $\lambda<\rho(A)$ строго отображает в себя конусный отрезок, откуда следует сходимость к нулю итераций $x_{k+1}=\lambda Ax_k$ из любого начального положения, что и означает отсутствие на окружности радиуса $\rho(A)$ других собственных значений. ▶

12.4.5. Теорема о несовместных неравенствах. *Пусть линейный u-положительный оператор A имеет положительный собственный вектор x_0, соответствующий позитивному собственному значению $\lambda_0=1$. Тогда для всех $x\in K$, отличных от νx_0 $(\nu\geqslant 0)$, элементы x и Ax несравнимы: $x-Ax\notin K$, $Ax-x\notin K$, т. е.*

$$x\not\geqslant Ax,\qquad x\not\leqslant Ax.$$

◀ Заметим, что элемент x_0, очевидно, принадлежит $K(u)$, поэтому оператор A также x_0-положителен.

Возьмем произвольную ненулевую точку $x\geqslant 0$ и обозначим через α_0 и β_0, соответственно, наибольшее и наименьшее из чисел α и β, при которых

$$\alpha x_0\leqslant A^k\leqslant\beta x_0,$$

где k выбрано из условия $A^kx\in K(x_0)$. Допустим, $A^kx\neq\nu x_0$. Тогда элементы $A^kx-\alpha_0x_0$ и $\beta_0x_0-A^kx$ отличны от нуля и положительны, и поэтому найдутся такие натуральные p и q и положительные α_1 и α_2, что

$$A^p(A^kx-\alpha_0x_0)\geqslant\alpha_1x_0,\qquad A^q(\beta_0x_0-A^kx)\geqslant\alpha_2x_0. \tag{12.6}$$

Если $x \geqslant Ax$, то $A^k x \geqslant A^{p+k}x$ и в силу первого неравенства (12.6) $A^k x \geqslant (\alpha_0+\alpha_1)x_0$, что противоречит максимальности α_0. В случае $x \leqslant Ax$ аналогичным образом получается противоречие — при помощи второго неравенства (12.6) — с определением β_0.

Теперь остается возможность $A^k x = \nu x_0$. Если $x \geqslant Ax$, то $A^k x \geqslant x$, т. е. $\nu x_0 - x \geqslant 0$. Если бы элемент $\nu x_0 - x$ был отличен от нуля, то элементы $A^n(\nu x_0 - x)$ также были бы отличны от нуля при достаточно больших n, но этого не может быть, поскольку $A^k(\nu x_0 - x) = 0$. Следовательно, $Ax \geqslant x$ возможно лишь при $x = \nu x_0$. Случай $Ax \leqslant x$ рассматривается аналогично. ►

12.5. Неподвижные точки

Монотонный сильно положительный оператор T назовем *θ-супероднородным*, если для любых $x \geqslant 0$ и $\tau \in (0, 1)$

$$T(\tau x) \geqslant \tau^\theta T(x), \tag{12.7}$$

причем $0 < \theta < 1$.

Такие операторы оказываются сжимающими в *метрике Биркгофа*

$$\rho(x, y) = \min\{\alpha : e^{-\alpha}x \leqslant y \leqslant e^{\alpha}x\} \qquad (x, y > 0).$$

◄ Действительно,

$$T(x) \geqslant T\left(e^{-\rho(x,y)}y\right) \geqslant e^{-\theta\rho(x,y)}T(y).$$

Аналогично,

$$T(y) \geqslant T\left(e^{-\rho(x,y)}x\right) \geqslant e^{-\theta\rho(x,y)}T(x),$$

откуда

$$\rho(T(x), T(y)) < \theta\rho(x, y),$$

что влечет за собой существование[9] и единственность неподвижной точки, $x^* = T(x^*)$. ►

Требование (12.7) в некоторых ситуациях оказывается слишком жестким. Например, когда $T(x) = Ax + b$, где A — линейный положительный оператор. В таких случаях часто удается обойтись более свободным предположением (детали см. в [12])

$$T(\tau x) \geqslant [1 + \nu(x, \tau)]\tau T(x), \qquad \nu(x, \tau) > 0.$$

Есть также удобные топологические принципы существования неподвижных точек у положительных операторов.

[9] Поскольку $K(u)$ полно по метрике Биркгофа. (?)

12.5.1. Теорема. *Пусть при достаточно больших по норме $x \in K$ положительный вполне непрерывный оператор T удовлетворяет условию*

$$T(x) \not\geqslant x.$$

Тогда оператор T имеет на K неподвижную точку. А если дополнительно $T(x) \not\leqslant x$ при достаточно малых по норме $x \in K$, то T на K имеет ненулевую неподвижную точку.

Об условиях

$$T(x) \not\geqslant x, \quad T(x) \not\leqslant x$$

можно судить по дифференциальным свойствам оператора в нуле и на бесконечности. При этом требования к дифференцируемости могут быть ослаблены.

Оператор F называется *дифференцируемым по конусу* в точке x, если для всех $h \in K$

$$F(x+h) - F(x) = F'_x h + o(\|h\|),$$

где $F'_x : E \to E$ — линейный ограниченный оператор, называемый *производной по конусу.*

Полезна также дифференциальная асимптотика на бесконечности. Оператор F называется *дифференцируемым на бесконечности по конусу*, если существует такой линейный ограниченный оператор F'_∞, что для $x \in K$

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|\geqslant R} \frac{\|F(x) - F'_\infty x\|}{\|x\|} = 0.$$

Оператор F'_∞ называют *асимптотической производной по конусу.*

12.6. Принцип Биркгофа—Тарского

Как хороший подарок — не должен иметь утилитарной ценности, так и хорошая теорема. Принцип Биркгофа—Тарского (см. [3, т. 1]) о существовании неподвижной точки у *разрывного* оператора никому не нужен, но — на очень высоком уровне.

В [3, т. 1] теорема была доказана в ситуации сильно миниэдрального конуса. Вот общий результат.

Монотонный оператор F называется *предельно монотонно компактным* на ограниченном множестве $M \subset E$, если сходится любая последовательность элементов

$$x_0 \leqslant F(x_1) \leqslant F^2(x_2) \leqslant \ldots \leqslant F^n(x_n) \leqslant \ldots, \tag{12.8}$$

где все $x_n \in M$.

Определение выглядит неуклюже, но оно удобно и легко проверяется. Оператор F предельно монотонно компактен в любой из следующих ситуаций (**?**):

- Пространство E конечномерно.
- Конус K вполне правилен, оператор F ограничен на M по норме.
- Конус K правилен, оператор F преобразует ограниченное множество M в себя.

12.6.1. Теорема. *Пусть предельно монотонно компактный оператор F отображает в себя ограниченное замкнутое множество M и существует точка $x_0 \in M$, которая идет вперед, т. е. $F(x_0) \geqslant x_0$. Тогда у F на M существует неподвижная точка x^*.*

◄ Обозначим через Ω множество тех элементов $x \in M$, которые идут вперед, т. е. $F(x) \geqslant x$. В силу $F(x_0) \geqslant x_0$ множество Ω не пусто.

Для доказательства достаточно установить существование на Ω хотя бы одного максимального элемента $x^* \in \Omega$ (т. е. $x \not\geqslant x^*$ для любого другого $x \in \Omega$). В этом случае $F(x^*) \in \Omega$ в силу $F(F(x^*)) \geqslant F(x^*)$, но тогда из максимальности x^* вытекает $F(x^*) = x^*$.

Покажем, что x^* существует. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная монотонно возрастающая последовательность, все элементы которой $x_n \in \Omega$. Легко видеть, что последовательность $F^n(x_n)$ удовлетворяет цепочке неравенств (12.8), сходится, $F^n(x_n) \to z$, и мажорирует $\{x_n\}$ в силу $F^n(x_n) \geqslant x_n$. Наконец, $z \in \Omega$, что вытекает из предельного перехода в неравенстве $F(z) \geqslant F^{n+1}(x_n)$. Перечисленные свойства обеспечивают существование верхней грани в Ω у любой монотонно возрастающей последовательности $\{x_n\} \subset \Omega$. Для завершения доказательства остается сослаться на лемму Цорна. ►

12.7. Задачи и дополнения

- Конус K_+ в $C[0, 1]$ — нормален, телесен, миниэдрален, не правилен.

Конус K_+ в пространстве $C^1[0, 1]$ — не воспроизводящий, не нормальный, не миниэдральный.

Конус K_+ в $L_p[0, 1]$ — нормальный, воспроизводящий, не телесный, сильно миниэдральный, вполне правильный. В случае $p = 1$ — допускает оштукатуривание.

• Говорят, что конус K *допускает оштукатуривание*, если существует больший конус $K_1 \supset K$ такой, что каждая точка $x \in K$ входит в K_1 вместе с шаром радиуса $\alpha\|x\|$, где $\alpha > 0$ не зависит от x. Конус K называется *локально компактным*, если компактно его пересечение с любым шаром.

Локально компактный конус допускает оштукатуривание. Оштукатуриваемые конусы вполне правильны.

• Положительный функционал $f \in E^*$ называется *сильно положительным*, если

$$f(x) \geqslant \gamma\|x\|, \quad \gamma > 0, \quad x \geqslant 0.$$

Сильно положительные функционалы существуют в том и только том случае, когда конус допускает *оштукатуривание*.

• **Гетеротонные операторы.** Отображение $T(x)$ называется *гетеротонным*, если оно представимо в диагональном виде [10)]

$$T(x) = \widehat{T}(x, x),$$

причем *сопутствующий оператор* $\widehat{T}(v, w)$ монотонно растет по v и убывает по w, действуя из $E \times E$ в E.

Далее вводится оператор $\widetilde{T}$, сопоставляющий паре элементов (v, w) пару $(\widehat{T}(v, w), \widehat{T}(w, v))$. Легко видеть, что если теперь пространство $E \times E$ пар (v, w) полуупорядочить конусом $K_{+,-} = K \times (-K)$, то оператор $\widetilde{T}(v, w)$ будет монотонным по этому конусу.

В результате изучение $T(x)$ может быть сведено к исследованию монотонного оператора $\widetilde{T}(v, w)$ в расширенном пространстве.

Роль инвариантного конусного отрезка теперь играет *сильно инвариантный* конусный отрезок $[v, w]$, определяемый неравенствами

$$\widehat{T}(v, w) \geqslant v, \qquad \widehat{T}(w, v) \leqslant w,$$

а предположение о единственности неподвижной точки теперь равносильно единственности решения системы уравнений

$$\widehat{T}(v, w) = v, \qquad \widehat{T}(w, v) = w,$$

что обеспечивается, например, «супероднородностью» [11)]:

$$\widehat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant \tau^\theta \widehat{f}(v, w), \qquad v, w \geqslant 0,$$

при любом $\tau \in (0, 1)$ и некотором $\theta \in (0, 1)$.

• Факт положительности оператора иногда «дает эффект» почти без дополнительных предположений — см. [3, т. 2]. Вот еще одна изюминка. *Если линейный оператор, действующий в банаховом пространстве, полуупорядоченном воспроизводящим конусом, — положителен, то он — непрерывен.*

[10)] Примеры в: *Босс В.* Лекции по математике: Дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: УРСС, 2004.

[11)] См.: *Опойцев В. И.* Труды Моск. матем. об-ва. 1978. **36**. С. 237–273.

Глава 13

Сводка определений и результатов

13.1. Метрические и нормированные пространства

✓ Множество X называется *метрическим пространством*, если на пáрах его элементов задано *расстояние* (*метрика*) $\rho(x, y)$, удовлетворяющее условиям (аксиомам):

- $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

✓ *Линейное пространство* X определяется как множество элементов, на котором заданы две операции: *сумма* $x + y$ и *произведение* λx (элемента $x \in X$ на число λ (вещественное или комплексное)).

✓ Два линейных пространства X и Y считаются *изоморфными*, если между их элементами и линейными операциями может быть установлено взаимно однозначное соответствие. *Все конечномерные линейные пространства n измерений изоморфны друг другу.*

✓ Непустое подмножество $X_0 \subset X$ называют *линейным многообразием*, если принадлежность любого числа точек $x_k \in X_0$ влечет за собой принадлежность X_0 *линейных комбинаций*:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in X_0.$$

Множество всевозможных линейных комбинаций при заданном наборе $x_1, \ldots, x_n$ образует линейное *пространство*, *порожденное* векторами $x_1, \ldots, x_n$ (*натянутое на* $x_1, \ldots, x_n$). Совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из $\Omega \subset X$ называют *линейной оболочкой* множества Ω.

✓ Элементы $x_1, \ldots, x_n$ называют *линейно зависимыми* (*независимыми*), если существует (не существует) такая невырожденная (не все $\lambda_j = 0$) линейная комбинация, что

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

Бесконечная система элементов линейно независима, если любой **конечный** набор из нее линейно независим.

✓ *Нормированным пространством* называют линейное пространство X с заданной на нем *нормой* $||x||$, обязанной удовлетворять условиям:

$$||x|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad ||x|| \geqslant 0, \quad ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$$

и *неравенству треугольника*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Метрика в X определяется по правилу: $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

✓ *Скалярное произведение* элементов x, y вещественного линейного пространства X определяется как функция $\langle x, y\rangle$, принимающая вещественные значения и удовлетворяющая условиям:

- $\langle x, x\rangle$ — *обязательно вещественное число, строго большее нуля при ненулевом* x, *и равное нулю только при* $x = 0$,
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
- $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

В случае *комплексного пространства* вводятся небольшие видоизменения. Во-первых, произведение $\langle x, y\rangle$ может принимать комплексные значения. Во-вторых, аксиома $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ заменяется более общим требованием $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$, где звездочка обозначает комплексное сопряжение.

✓ Скалярное произведение определяет норму: $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Открытые и замкнутые множества

✓ *Открытым* (*замкнутым*) шаром $B(r, y)$ (*радиуса* $r > 0$ с *центром* y) в метрическом пространстве (X, ρ) называется совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < r$ (соответственно, $\rho(x, y) \leqslant r$).

✓ *Окрестностью* точки $z \in X$ назовем (пока) любой открытый шар с центром в этой точке [1], а ε-окрестностью $z \in X$ — шар $B(\varepsilon, z)$, $\varepsilon > 0$.

✓ Элемент $u \in X$ считается *предельной точкой* множества $U \subset X$, если любая окрестность u содержит хотя бы одну точку из U помимо самой u. Предельные точки называют также *точками сгущения*.

✓ Множество $U \subset X$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $u \in U$ оно содержит некоторую окрестность u, и — *замкнуто*, если содержит все свои предельные точки.

✓ Множество $\overline{U}$, полученное присоединением к U всех его предельных точек, называется *замыканием* U.

- ***Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.***

---

[1] При топологическом взгляде на предмет (глава 5) окрестностью точки $z \in X$ называется любое открытое множество, содержащее точки z.

- *Объединение конечного числа и пересечение любого числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*
- *Дополнение замкнутого (открытого) множества до всего пространства есть открытое (замкнутое) множество.*
- $U \subset V \Rightarrow \overline{U} \subset \overline{V}$, $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

✓ **Теорема отделимости 2.2.1.** *Если два замкнутых множества $U_1, U_2 \subset X$ не пересекаются, то существуют два открытых множества W_1 и W_2 таких, что*

$$U_1 \subset W_1, \quad U_2 \subset W_2, \quad \text{и} \quad W_1 \cap W_2 = \varnothing.$$

✓ Множество $U \subset X$ *ограниченно*, если заключено в некотором шаре.

✓ *Внутренняя точка* $u \in U$ определяется наличием окрестности, целиком лежащей в U.

✓ Элемент $u \in U \subset X$, не являющийся предельной точкой U, называется *изолированной* точкой U.

✓ Замкнутое множество $U \subset X$, не содержащее изолированных точек, называют *совершенным*.

✓ Метрическое пространство X считается *связным*, если оно не представимо в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств.

✓ Говорят, что множество U *плотно* в множестве $V \subset X$, если замыкание $\overline{U} \supset V$, а в случае $V = X$ — говорят, что U — *всюду плотно*. Метрическое пространство X, в котором существует счетное всюду плотное множество, называют *сепарабельным*.

✓ Множество U метрического пространства X называется *нигде не плотным*, если любой шар из X содержит в себе шар, не пересекающийся с U.

Сходимость

✓ Последовательность $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ элементов метрического пространства X называется *сходящейся*, если существует точка $x \in X$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

✓ Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

для любых $n, m > N$. Фундаментальные последовательности называют также *сходящимися в себе*.

✓ Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится в X.

✓ **Теорема о вложенных шарах 2.3.3.** *В полном метрическом пространстве X пересечение любой последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров $\overline{B}(r_n, x_n)$, радиусы которых стремятся к нулю, непусто.*

✓ Полное метрическое пространство $\widehat{X}$ называется *пополнением* пространства X, если X — подпространство $\widehat{X}$, причем X всюду плотно в $\widehat{X}$.

✓ **Теорема 2.4.2.** *Любое метрическое пространство X имеет единственное (с точностью до изометрии) пополнение $\widehat{X}$.*

✓ **Лемма 2.4.3.** *Подпространство X_0 полного метрического пространства X полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в X.*

✓ **Теорема Бэра о категории 2.5.1.** *В полном пространстве пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных множеств — всюду плотно.*

✓ Линейное нормированное пространство, *если оно полно*, называется — *банаховым*.

13.2. Интеграл и мера Лебега

✓ *Основная конструкция определения меры на примере «плоских» множеств.* За исходный пункт берется определение площади прямоугольника $m(P) = ab$, где a и b — стороны P. Площадь фигуры S, представимой в виде ***конечной*** совокупности ***непересекающихся*** прямоугольников $\{P_n\}$, полагается равной

$$m(S) = \sum_n m(P_n),$$

что называют *аддитивностью* меры $m(S)$. Из аддитивности в данном случае вытекает *счетная аддитивность*, или *σ-аддитивность*, — равенство остается справедливым в случае бесконечного числа слагаемых.

Далее для ограниченных множеств определяется *внешняя мера*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(P_n),$$

где инфинум берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или ***счетными*** системами прямоугольников.

Наконец, множество A называется *измеримым по Лебегу*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такую конечную совокупность A_ε непересекающихся прямоугольников, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Меру Лебега $\mu(A)$ измеримого множества A полагают равной $\mu^*(A)$.

✓ **Теорема Лебега 3.1.1.** *Совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций счетного объединения и счетного пересечения, а мера μ σ-аддитивна.*

Измеримые функции

✓ Функцию $f : X \to Y$ называют *измеримой*, если в X измерим прообраз $f^{-1}(A)$ любого измеримого в Y множества A.

В случае $f : X \to \mathbb{R}$ работает то же определение, но на прямой избирается система борелевских множеств (**!**), а не система множеств, измеримых по Лебегу.

✓ Функции, значения которых отличаются на множестве нулевой меры, считаются *эквивалентными*. В пространствах измеримых функций в качестве элементов обычно подразумеваются *классы эквивалентных функций*. Конкретную функцию называют *представителем* своего класса.

Когда говорят о поточечной сходимости измеримых функций, имеется в виду *сходимость почти всюду*, $f_n \xrightarrow{\text{п. в.}} f$, т. е. $f_n(x) \to f(x)$ может нарушаться на множестве нулевой меры.

✓ *Предел поточечно сходящейся последовательности измеримых функций* $f_n(x) \to f(x)$ *– измерим.*

✓ Измеримую функцию f называют *существенно ограниченной сверху*, если $f(x) \leqslant \alpha < \infty$ почти всюду. Наименьшее α называется *существенной верхней гранью* $f(x)$ и обозначается $\operatorname{ess\,sup} f(x)$.

Интеграл Лебега

✓ Интеграл Лебега строится по необычной (с точки зрения интеграла Римана) схеме. Разбиение области интегрирования на малые объемы осуществляется по признаку близости значений интегрируемой функции. Сначала рассматриваются *измеримые простые функции* $f : X \to \mathbb{R}$, принимающие не более чем счетное число значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, и для них интеграл по $A \subset X$ определяется как

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu(x) = \sum_n y_n \mu(A_n),$$

где $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$, причем множества A_n измеримы в силу измеримости $f(x)$ (как прообразы точек), а ряд справа предполагается *абсолютно сходящимся*.

Затем функцию $f(x)$ определяют как *интегрируемую по Лебегу* на X, если существует сходящаяся почти всюду к $f(x)$ последовательность суммируемых на X простых функций $f_n(x)$. Предел $\int\limits_X f(x)\,d\mu$ числовой последовательности $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu$ в этом случае объявляется *интегралом Лебега*. Используется также обычное обозначение $\int\limits_X f_n(x)\,dx$, когда мера строится с помощью непересекающихся прямоугольников, что на самом деле везде подразумевается, если не оговорено противное.

✓ *Интегрируемы по Лебегу любые измеримые на X функции.*

✓ В теории интеграла Лебега все время происходит жонглирование двумя типами сходимости: почти всюду, $f_n \xrightarrow{\text{п. в.}} f$, и по норме L_1, в записи $f_n \xrightarrow{L_1} f$. Сходимость $f_n \xrightarrow{L_1} f$ называют также *сходимостью в среднем*.

Определенную роль играет еще одно понятие. Последовательность $f_n(x)$ называют *сходящейся по мере* к функции $f(x)$, записывают как $f_n \xrightarrow{\mu} f$, если при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

✓ *Как $f_n \xrightarrow{\text{п. в.}} f$, так и $f_n \xrightarrow{L_1} f$, — влекут за собой сходимость по мере.*

✓ **Теорема 3.6.1.** *Если f_n сходится к f по мере или $f_n \xrightarrow{L_1} f$, то из $\{f_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.*

✓ **Теорема Леви о монотонной сходимости 3.7.1.** *Пусть монотонно возрастающая последовательность ($f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$ почти всюду) $\{f_n\} \subset L_1$, и интегралы от f_n ограничены в совокупности. Тогда почти всюду существует поточечный предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду и*

$$\int\limits_\Omega f_n(x)\,d\mu(x) \to \int\limits_\Omega f(x)\,d\mu(x)$$

на любом измеримом множестве Ω.

✓ **Теорема Лебега 3.7.2.** *Если*

$$\{f_n\} \subset L_1, \quad |f_n(x)| \leqslant \varphi(x) \in L_1 \quad \text{и} \quad f_n \xrightarrow{\text{п. в.}} f,$$

то $f \in L_1$ и возможен переход к пределу под знаком интеграла, как в предыдущей теореме.

✓ **Лемма Фату 3.7.3.** *Пусть $\{f_n\} \subset L_1$, все $f_n(x) \geqslant 0$, все интегралы $\int\limits_X f_n(x)\,d\mu(x) < \gamma$ и $f_n \xrightarrow{\text{п. в.}} f$. Тогда*

$$f \subset L_1 \quad \text{и} \quad \int\limits_X f(x)\,d\mu(x) < \gamma.$$

✓ **Теорема**[2] **3.8.1.** *Для любой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$ по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что*

$$\left| \int\limits_{\Delta} f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого $\Delta \subset X$ при условии $\mu(\Delta) < \delta$.

13.3. Компактность и топология

✓ Множество $M \subset X$ метрического пространства X называется *компактным*, либо *компактом*, если всякая последовательность в M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M.

✓ *Если замыкание некоторого множества U компактно, то само множество U называется* ***предкомпактным.***

✓ Множество U метрического пространства X называется *ε-сетью* множества $V \subset X$, если для любого $x \in M$ найдется такой элемент $y \in M$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

✓ **Теорема Хаусдорфа 4.1.3.** *Замкнутое подмножество M полного метрического пространства X компактно тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть множества M.*

✓ Любое компактное метрическое пространство сепарабельно.

✓ Компактность подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ равносильна его замкнутости и ограниченности.

✓ Компактное множество всегда ограничено и замкнуто.

✓ Замкнутое подмножество компакта — компакт.

✓ Компакт $M \subset X$ остается компактом при «погружении» X в более широкое метрическое пространство, $X \subset Y$.

✓ **Лемма о покрытии 4.1.4.** *Чтобы замкнутое множество M было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого открытого покрытия M можно было выделить конечное подпокрытие.*

✓ **Теорема Арцела 4.2.1.** *Для компактности ограниченного и замкнутого в $C[0, 1]$ множества M необходимо и достаточно, чтобы функции из этого множества были равностепенно непрерывны.*

---

[2] Об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

✓ **Теорема Рисса 4.2.2.** *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Для компактности ограниченного и замкнутого в $L_p(\Omega)$ множества M необходимо и достаточно, чтобы функции этого множества были равностепенно непрерывны в среднем.*

✓ **Теорема 4.3.1.** *Непрерывный образ компакта есть компакт.*

✓ **Теорема Вейерштрасса 4.3.2.** *Непрерывный функционал f, отображающий компакт X в $\mathbb{R}$, ограничен и достигает своих верхней и нижней граней.*

✓ **Теорема 4.3.5.** *В бесконечномерном нормированном пространстве L шар не является предкомпактным множеством.*

✓ **Лемма 4.3.6.** *Каково бы ни было замкнутое подпространство E_0 банахова пространства E, в случае $E_0 \neq E$ на единичной сфере $S = \{x : \|x\| = 1\}$ найдется элемент $z \in S$, удаленный от E_0 на расстояние не менее $1 - \varepsilon$ при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$. Если же E_0 конечномерно, утверждение сохраняет силу при $\varepsilon = 0$.*

✓ **Теорема 4.3.7.** *Для конечномерности банахова пространства E необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное множество из E было предкомпактно.*

Топологический ракурс

✓ *Топологическим пространством называется множество X, в котором выделено некоторое семейство τ (называемое топологией)* ***открытых*** *подмножеств, удовлетворяющее двум требованиям:*

- *Само X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ.*
- *Сумма* ***любого*** *и пересечение* ***конечного*** *числа множеств из τ принадлежат τ.*

✓ Пересечение любого множества топологий — есть топология. Какова бы ни была совокупность подмножеств X, существует *минимальная* (по включению) *топология*, его содержащая.

✓ ***Окрестностью*** точки $x \in X$ объявляется любое открытое множество, содержащее эту точку.

✓ Пространство (X, τ) называется ***хаусдорфовым*** (как и топология τ), если у различных точек существуют *непересекающиеся* окрестности. Все метрические пространства хаусдорфовы.

✓ Множество $U \subset X$ определяется как ***замкнутое***, если его дополнение $\overline{U} = X \backslash U$ открыто. ***Замыканием*** $\overline{U}$ считается пересечение всех замкнутых множеств, содержащих U (наименьшее, по включению, замкнутое множество, содержащее U). *В хаусдорфовых пространствах точки, равно как и счетные их множества, — замкнуты.*

✓ Множество $K \subset X$ определяется как ***компактное***, если каждое его *покрытие* открытыми множествами содержит *конечное подпокрытие*. Определение компактности отличается от предыдущего, но в метрическом пространстве разногласий не возникает в силу леммы 4.1.4.

✓ Семейство $\widehat{\tau} \in \tau$ называется *базой* топологии τ, если любой элемент (открытое множество) из τ представи́м в виде объединения элементов из $\widehat{\tau}$. В метрическом пространстве базу образуют открытые шары.

Локальной базой в точке $x \in X$ называют такую совокупность σ окрестностей точки x, что любая окрестность x содержит окрестность x из σ.

✓ Последовательность $\{x_n\} \subset X$ считается *сходящейся* к точке x, если любая окрестность x содержит *хвост* $\{x_n\}$, т. е. все точки $\{x_n\}$, начиная с некоторой.

✓ Оператор $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* x, если по любой окрестности V точки $y = f(x)$ можно указать окрестность U точки x такую, что $f(U) \subset V$.

✓ При задании топологии на линейном пространстве E дополнительно предполагается *непрерывность операций сложения и умножения на числа*, т. е. непрерывность отображений $z = x + y$ и $z = \alpha x$.

✓ Линейное топологическое пространство называют *локально выпуклым*, если существует локальная база из выпуклых окрестностей.

Каждая локально выпуклая топология может быть задана с помощью семейства полунорм $\{p_\alpha(x)\}$: локальная база определяется конечными пересечениями множеств вида $\{p_\alpha(x)\}$.

✓ **Слабая топология** задается локальной базой нуля (локальные базы других точек получаются сдвигом) линейного пространства E, состоящей из конечных пересечений областей вида

$$\Omega = \{x : |f(x)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $f : E \to \mathbb{R}$ обозначает произвольный непрерывный линейный функционал.

✓ **Теорема 5.4.1.** *Всякое локально компактное пространство X конечномерно. Любой компакт в бесконечномерном пространстве нигде не плотен.*

13.4. Линейные операторы и функционалы

✓ Оператор $A : E_x \to E_y$ *линеен*, если *аддитивен*, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$, и *однороден*, $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

✓ Линейный оператор A называется *ограниченным*, если существует константа γ такая, что $\|Ax\| \leqslant \gamma\|x\|$. Наименьшее γ в неравенстве называется *нормой линейного оператора* A и обозначается символом $\|A\|$.

✓ **Лемма 6.1.1.** *Непрерывность линейного оператора равносильна ограниченности.*

✓ *Линейный функционал* $f : E \to \mathbb{R}$ ограничен, если $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| < \infty$. Число $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)|$ называется *нормой линейного функционала* f.

✓ **Теорема Хана—Банаха 6.2.1.** *Всякий линейный ограниченный функционал* f, *определенный на линейном многообразии* E_0 *линейного нормированного пространства* E, *можно продолжить на все пространство, не увеличивая нормы* f.

✓ *Пусть* x_0 *ненулевой элемент из* E. *Тогда существует линейный функционал* f *такой, что* $\|f\| = 1$ *и* $f(x_0) = \|x_0\|$.

✓ *Через любую точку* x_0 *на поверхности единичного шара* B *можно провести опорную гиперплоскость*[3] *к* B.

✓ *Пусть линейное многообразие* $E_0 \subset E$ *и* $x_0 \neq 0$. *Тогда на* E *существует такой линейный функционал* f, *что* $f(x) = 0$ *для любого* $x \in E_0$, $f(x_0) = 1$ *и*

$$\|f\| = \frac{1}{\inf\limits_{x \in E_0} \|x - x_0\|}.$$

✓ *Любые неравные элементы* u, v *в локально выпуклом пространстве могут быть разделены некоторым линейным функционалом* f, *в смысле* $f(u) \neq f(v)$.

✓ Совокупность всех ограниченных линейных функционалов, определенных на E, образует линейное пространство, которое называется *сопряженным* к E и обозначается E^*. Норма в E^* определяется как норма функционала.

✓ Значение функционала $f \in E^*$ в точке $x \in E$ обозначается, наряду с $f(x)$, как и скалярное произведение, через $\langle f, x \rangle$.

✓ **Теорема 6.3.1.** *Сопряженное пространство* E^* *всегда банахово, т. е. полно, независимо от полноты* E.

✓ В случае $E = E^{**}$ пространство называют *рефлексивным*.

✓ Если A — линейный оператор, то $f(Ax) = \langle f, Ax \rangle$ — есть некоторый линейный функционал $g(x) = \langle g, x \rangle$. *Сопряженный оператор* A^* определяется условием $g = A^* f$, т. е. $\langle f, Ax \rangle = \langle A^* f, x \rangle$. Иными словами, если $f(x)$ меняется в связи с воздействием на аргумент линейного преобразования A, то A^* позволяет достичь того же результата, не трогая x, а воздействуя на функционал: $f \Rightarrow A^* f$.

---

[3] Т. е. задать такой линейный функционал f, что $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in B$.

✓ Последовательность $\{x_n\} \subset E$ в линейном нормированном пространстве называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in E$, — пишут $x_n \xrightarrow{w} x$, — если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ для любого $f \in E^*$. Точку x называют *слабым пределом* $\{x_n\}$.

Обычную сходимость в противовес слабой называют иногда *сильной*, и обозначают либо просто $x_n \to x$, либо $x_n \xrightarrow{s} x$.

✓ Последовательность линейных функционалов $\{f_n\} \subset E^*$ называют *слабо сходящейся* к функционалу $f \in E^*$, — обозначение $f_n \xrightarrow{w} f$, — если $f(x_n) \to f(x)$ для любого $x \in E$. Иными словами, *слабая сходимость последовательности функционалов — это поточечная сходимость.*

✓ *Замкнутый шар в банаховом пространстве E слабо замкнут* (множество Ω *слабо замкнуто*, если слабый предел каждой слабо сходящейся последовательности элементов из Ω принадлежит Ω).

✓ Множество Ω в банаховом пространстве E называется *слабо компактным*, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset \Omega$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу из Ω.

✓ **Теорема 6.5.1.** *Замкнутый единичный шар в гильбертовом пространстве слабо компактен.*

✓ Множество X в банаховом пространстве E называется *идеально выпуклым*, если

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots \in X$$

для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ и любой числовой последовательности $\{\alpha_n\}$, при условии $\alpha_n \geqslant 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = 1$.

✓ Линейное подпространство непрерывных функций в L_p выпукло — но не идеально. Открытые и замкнутые выпуклые множества $X \subset E$ идеально выпуклы. Пересечение любого числа идеально выпуклых множеств — идеально выпукло. При непрерывном линейном преобразовании образ ограниченного идеально выпуклого множества является идеально выпуклым.

✓ **Теорема Банаха—Штейнгауза 6.7.1.** *Если семейство линейных операторов*

$$A_\lambda : E_1 \to E_2 \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

равномерно по λ ограничено в каждой точке $x \in E_1$, то нормы $\|A_\lambda\|$ ограничены в совокупности, т.е. $\|A_\lambda\| < \beta < \infty$ $(\lambda \in \Lambda)$.

✓ **Теорема 6.7.2.** *Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена* (*сильно, т.е. по норме*).

✓ **Теорема 6.8.1.** *При непрерывном линейном отображении одного банахова пространства **на** другое, $A : E_1 \to E_2$, образ $A\Omega$ любого открытого множества Ω — открыт.*

✓ **Теорема 6.8.2.** *Если непрерывный линейный оператор A взаимно однозначно отображает одно банахово пространство **на** другое, то обратный оператор A^{-1} непрерывен.*

✓ Линейный оператор A называется *замкнутым*, если из $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует $\mathbf{D}_A$ и $Ax = y$.

✓ **Теорема о замкнутом графике 6.9.1.** *Если область определения $\mathbf{D}_A = E_1$ и линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ замкнут, то A ограничен (а значит, непрерывен).*

✓ Говорят, что незамкнутый оператор A допускает *замыкание* $\bar{A}$, если его можно расширить до замкнутого оператора по правилу:

$$x_n \in \mathbf{D}_A,\ x_n \to x,\ Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad \bar{A}x = y.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n \to 0,\ Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

✓ **Теорема 6.10.1.** *Пусть линейное сюръективное отображение (отображение «на») $A : E_1 \to E_2$ удовлетворяет условию $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$, $m > 0$. Тогда существует обратный линейный непрерывный оператор $A^{-1} : E_2 \to E_1$.*

✓ **Теорема 6.10.2.** *Если оператор A имеет непрерывный обратный, то и $A + \Delta A$, при условии достаточной малости ΔA по норме, — непрерывно обратим.*

✓ Линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ называется *вполне непрерывным*, либо *компактным*, если он отображает ограниченные множества E_1 в предкомпактные множества E_2. *Вполне непрерывный оператор всегда непрерывен, поскольку ограничен.*

✓ **Теорема 6.11.1.** *Вполне непрерывный оператор $A : E \to E$, где E банахово пространство с базисом, по любому наперед заданному $\varepsilon > 0$ может быть представлен суммой $A = A_1 + A_2$, где A_1 конечномерный оператор, а A_2 имеет норму, меньшую $\varepsilon > 0$.*

✓ *Если линейный оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне непрерывен, а $B : E_1 \to E_2$ — линейный ограниченный оператор, и область значений $\mathbf{R}(B) \subset \mathbf{R}(A)$, то B — также вполне непрерывен.* Иными словами, задача «сломать» полную непрерывность оператора A, не выходя за пределы области значений и сохраняя ограниченность, — обречена на провал.

✓ *Любой ограниченный линейный функционал вполне непрерывен.*

✓ *Вполне непрерывный оператор A переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся.* В гильбертовом пространстве это является характеристическим свойством вполне непрерывного оператора.

✓ *Произведение вполне непрерывного оператора на ограниченный (неважно, слева или справа) — вполне непрерывно.*

✓ **Теорема 6.11.2.** *Если область значений вполне непрерывного оператора A замкнута, — оператор A конечномерный.*

✓ **Теорема 6.11.3.** *Пусть оператор A — вполне непрерывен, и уравнение $(I - A)x = 0$ не имеет ненулевых решений. Тогда область значений $\mathbf{R}_{(I-A)}$ — замкнута (является подпространством E).*

✓ **Теорема 6.11.4.** *Оператор A^*, сопряженный вполне непрерывному $A : E \to E$, — вполне непрерывен.*

✓ **Теорема 7.1.1.** *В непустом замкнутом выпуклом подмножестве L* ***гильбертова*** *пространства H существует* ***единственный*** *элемент $u \in L$, ближайший к $x \notin L$, т. е. $\rho(x, L) = \|x - u\|$.*

✓ **Теорема 7.1.2.** *В гильбертовом пространстве любое замкнутое подпространство $L \subset H$ имеет ортогональное дополнение $L^\perp = \{x : \langle x, z\rangle = 0,\ z \in L\}$,*

$$H = L \oplus L^\perp,$$

причем подпространство $L^\perp \subset H$ — замкнуто.

✓ **Теорема 7.1.3.** *В гильбертовом пространстве всякий линейный функционал $f \in H^*$ представи́м скалярным произведением $f(x) = \langle g, x\rangle$.*

✓ **Теорема 7.1.4.** *Гильбертово пространство H слабо полно.*

✓ Система векторов $\{e_n\} \subset H$ называется *ортонормированной*, если

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Последовательность $\{e_n\}$ линейно независимых векторов можно превратить в ортонормированную $\{h_n\}$ с помощью *процесса ортогонализации Шмидта*.

✓ Числа $\xi_j = \langle x, e_j\rangle$ называют *координатами* $x \in H$ относительно ортонормированной системы $\{e_n\}$.

✓ *Неравенство Бесселя*:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$

в случае полной системы $\{e_n\}$ переходит в *равенство Парсеваля*:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle^2 = \|x\|^2.$$

✓ **Теорема Вейерштрасса 7.3.1.** *Для непрерывной на* $[a, b]$ *функции* $f(t)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *всегда можно указать такой полином* $P_n(t)$, *что*

$$|f(t) - P_n(t)| < \varepsilon \quad \textit{для любого} \quad t \in [a, b].$$

✓ *Самосопряженный* (или *эрмитов*) оператор A (в гильбертовом пространстве) определяется равенством $A^* = A$.

✓ **Лемма 7.4.1.** *Если линейный самосопряженный оператор* A *вполне непрерывен и* $x_n \xrightarrow{w} x$, *то*

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \to \langle Ax, x \rangle.$$

✓ **Теорема 7.4.2.** *Квадратичная форма* $\langle Ax, x \rangle$ *с самосопряженным компактным оператором* A *на единичной сфере достигает своего максимума и минимума.*

13.5. Обобщенные функции

✓ *Пространство* $\mathbb{D}$ *основных функций* определяется как совокупность *финитных функций*, непрерывно дифференцируемых любое число раз.

✓ Непрерывная функция $\varphi(x)$ называется *финитной*, если область, в которой $\varphi(x) \neq 0$, — ограничена. Замыкание области, где $\varphi(x) \neq 0$, именуется *носителем* $\varphi(x)$ и обозначается как $\operatorname{supp}\varphi$. Разные функции из $\mathbb{D}$ могут быть отличны от нуля на разных областях (у каждой свой носитель).

✓ *Сходимость в* $\mathbb{D}$: последовательность $\varphi_n \subset \mathbb{D}$ сходится к φ, если объединение всех носителей,

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp}\varphi_n,$$

ограничено и производные $\varphi_n^{(k)}(x)$ любого фиксированного порядка k сходятся к $\varphi^{(k)}(x)$ равномерно на Ω.

✓ *Всякий линейный непрерывный функционал* $\langle f, \varphi \rangle$ *на* $\mathbb{D}$ *называется обобщенной функцией.*

✓ Из-за наслоения понятий возникает некоторая неуклюжесть. Хорошо было бы говорить просто о функционалах, но вектор $f(x)$, с помощью которого записывается функционал, получается как бы «главнее» — и классифицируется как обобщенная функция. В результате теория развивается с помощью функционалов f, аргументами которых служат $\varphi \in \mathbb{D}$, а в уме держатся функции f с аргументами $x \in \mathbb{R}$.

✓ Если функционал f представим в виде

$$\langle f, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

обобщенную функцию $f(x)$ называют *регулярной*.

✓ *Дельта-функция* $\delta(x)$ — не регулярный функционал, действующий в $\mathbb{D}$ по правилу $\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$. Для достижения единообразия чисто условно пишут

$$\langle\delta, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx.$$

✓ Последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций называют *сходящейся к обобщенной функции* f, если $\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ для любой функции $\varphi \in \mathbb{D}$.

✓ Некоторые формулы:

$$\langle f(x-u), \varphi\rangle = \langle f, \varphi(x+u)\rangle, \qquad \langle f(\gamma x), \varphi\rangle = |\gamma|^{-1}\left\langle f(x), \varphi\left(\frac{x}{\gamma}\right)\right\rangle,$$

$$\langle\delta(x-u), \varphi(x)\rangle = \varphi(u), \qquad \langle\delta(\gamma x), \varphi(x)\rangle = |\gamma|^{-1}\varphi(0),$$

$$\delta[f(x)] = \sum_{f(x_k)=0} \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|}.$$

✓ Дифференцирование обобщенной функции f определяется *правилом переброски производной*:

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle, \qquad \langle f^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k\langle f, \varphi^{(k)}\rangle.$$

✓ Любая *локально интегрируемая функция* (интегрируемая на любом компакте), как обобщенная, — без проблем дифференцируется сколько угодно раз. Более того, если $f_n \to f$, то и $f_n' \to f'$. А если на $f_n \to f$ смотреть как на частичные суммы некоторого ряда, получается, что сходящийся ряд можно сколько угодно раз дифференцировать, — он будет сходиться, в обобщенном смысле.

13.6. Линейные уравнения

✓ Уравнение $Ax = y$ с линейным оператором A называется *корректно разрешимым*, если обратный оператор A^{-1} существует и ограничен, — *нормально разрешимым*, если область значений $\mathbf{R}_A$ замкнута в E_2, — *плотно разрешимым*, если $\mathbf{R}_A$ плотно в E_2.

✓ *Ядро сопряженного оператора является ортогональным дополнением к области значений* (*образу*) *исходного оператора*.

✓ *Для нормальной разрешимости уравнения $Ax = y$ необходимо и достаточно, чтобы $Ax = y$ было разрешимо для тех и только тех правых частей, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения $A^*x = 0$.*

✓ *Для однозначной разрешимости $Ax = y$ на $\mathbf{R}_A$ достаточно, чтобы $A^*f = g$ было плотно разрешимо.*

✓ *Для разрешимости $A^*f = g$ при любом g необходима и достаточна корректная разрешимость $Ax = y$ на $\mathbf{R}_A$.*

✓ *Для разрешимости $Ax = y$ при любом y необходима, — а если A замкнут, то и достаточна, — корректная разрешимость $A^*f = g$ на $\mathbf{R}_{A^*}$.*

✓ **Теорема 9.3.1.** *Пусть линейный оператор T действует и вполне непрерывен в банаховом пространстве E. Тогда уравнения*

$$x - Tx = y, \quad f - T^*f = g$$

либо оба разрешимы при любых правых частях, что соответствует исключительно нулевой разрешимости однородных уравнений $x - Tx = 0$ и $f - T^*f = 0$, либо однородные уравнения имеют конечное совпадающее число линейно независимых решений

$$x_1, \dots, x_n; \quad f_1, \dots, f_n;$$

и тогда для разрешимости $x - Tx = y$ $(f - T^*f = g)$ необходимо и достаточно, чтобы при всех j от 1 до n:

$$\langle f_j, y\rangle = 0 \qquad (\textit{соответственно}, \ \langle g, x_j\rangle = 0).$$

Общие решения уравнений $x - Tx = y$ и $f - T^*f = g$ в этом случае имеют вид линейных комбинаций

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \qquad f = f_0 + \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_j,$$

где x_0 и f_0 — какие-либо частные решения исходных уравнений.

13.7. Спектральные свойства

✓ *Комплексным расширением* вещественного пространства E' называют комплексное пространство E с элементами $z = x+iy$ $(x, y \in E')$, линейные операции над которыми определяются естественным образом: при сложении действительные и мнимые части складываются по отдельности и

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x).$$

Норма в E определяется как

$$\|x + iy\| = \max_{\tau} \|x \sin\tau + y\cos\tau\|.$$

Операторы $A : E' \to E'$ продолжаются на E по правилу

$$A(x + iy) = Ax + iAy.$$

При этом $\|A\|_E = \|A\|_{E'}$.

✓ Комплексное число λ называется *регулярным значением* непрерывного линейного оператора A, если оператор $A - \lambda I$ имеет определенный на E ограниченный обратный. *Спектр* $\sigma(A)$ оператора $A : E \to E$ определяется как дополнение к множеству его регулярных значений.

✓ Иными словами, спектр $\sigma(A)$ — это совокупность λ, для которых оператор $A - \lambda I$ *необратим*, что может быть по двум причинам: оператор $A - \lambda I$ или *не инъективен*, или *инъективен, но не сюръективен*. В $\mathbb{R}^n$ встречается только первая причина.

В случае «неинъективности» уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение, называемое *собственным вектором*, а соответствующее λ — *собственным значением* оператора A.

✓ В общем случае множество собственных значений не исчерпывает весь спектр (как в $\mathbb{R}^n$).

✓ **Лемма 10.2.1.** *Если оператор A имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и каждому λ_j отвечает свой собственный вектор x_j, то множество $\{x_j\}$ линейно независимо.*

✓ Обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ принято называть *резольвентой* и обозначать $R(\lambda)$,

$$R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n},$$

где ряд справа называют *рядом Неймана.*

✓ Область определения резольвенты, состоящую из регулярных точек, называют также *резольвентным множеством.* Резольвентное множество всегда открыто, спектр — замкнут.

✓ **Теорема 10.2.2.** *При условии $|\lambda| > \|A\|$ ряд Неймана сходится и λ — регулярно.*

✓ *Спектральный радиус* $\rho(A)$ — это радиус минимального круга, содержащего весь спектр $\sigma(A)$.

✓ **Теорема 10.3.1.** *Для любого линейного ограниченного оператора $A : E \to E$ можно ввести эквивалентную норму $\|\cdot\|'$, в которой $\|A\|'$ будет сколь угодно близка к спектральному радиусу $\rho(A)$.*

✓ **Теорема 10.3.2.** *Какова бы ни была норма,*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}.$$

✓ **10.4.1.** *Собственное подпространство вполне непрерывного оператора, отвечающее ненулевому собственному значению, — конечномерно.*

✓ **10.4.2.** *Ненулевые точки спектра λ_n вполне непрерывного оператора изолированны.*

✓ **10.4.3.** *Ненулевая часть спектра вполне непрерывного оператора состоит только из собственных значений.*

✓ **Теорема 10.4.4.** *Спектр $\sigma(A)$ вполне непрерывного оператора — счетное множество, не имеющее предельных точек, отличных от нуля. Ненулевые $\lambda \in \sigma(A)$ являются собственными значениями конечной кратности.*

✓ **Теорема 10.5.1.** *Пусть в гильбертовом пространстве $Ax = \lambda x$, $A^*y = \mu y$ и $\lambda \neq \bar{\mu}$. Тогда $\langle x, y\rangle = 0$.*

✓ **Теорема 10.5.2.** *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, — ортогональны.*

✓ **Теорема Гильберта—Шмидта 10.5.3.** *Пусть A — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с нулевым ядром* ($\ker A = 0$). *Тогда в H существует ортонормированный базис $\{h_n\}$ из собственных векторов оператора A, в котором оператор имеет диагональный вид*

$$Ax = \sum_n \lambda_n x_n h_n,$$

где x_n — координаты вектора

$$x = \sum_n x_n h_n,$$

а λ_n — собственные значения, отвечающие векторам h_n.

13.8. Элементы нелинейного анализа

✓ Нелинейный оператор называется *вполне непрерывным*, если он непрерывен и ограниченные множества отображает в предкомпактные.

✓ Оператор $F : E_1 \to E_2$ *дифференцируем по Фреше* в точке $x \in E_1$, если существует линейный ограниченный оператор $F'_x : E_1 \to E_2$, называемый *производной Фреше* в точке x, — такой, что

$$F(x+h) - F(x) = F'_x h + \nu(x, h)$$

и $\dfrac{\|\nu(x,h)\|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Линейная часть приращения $F'_x h$ называется *дифференциалом Фреше*.

✓ *Слабым дифференциалом*, или *дифференциалом Гато*, называют предел (по норме)

$$\delta F(x,h) = \lim_{\tau\to 0} \frac{F(x+\tau h) - F(x)}{\tau}.$$

Слабый дифференциал называют также *вариацией* F.

Если предел $\delta F(x,h)$ оказывается линейным по h,

$$\delta F(x,h) = F'_x h,$$

оператор F'_x называют *производной Гато* (*слабой производной*) в точке x.

✓ *Производная Фреше, если существует, является производной Гато. Обратную импликацию обеспечивает требование непрерывности производной Гато по* x.

✓ **Теорема 11.2.1.** *Производная Фреше вполне непрерывного оператора — вполне непрерывна.*

✓ В частном случае нелинейного функционала $\varphi : E \to \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{E}(E,\mathbb{R})$ есть E^*. Поэтому производная Фреше $\varphi'(x)$ функционала $\varphi(x)$ — это вектор из E^*,

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = \langle \varphi'(x), \Delta x\rangle + o(\|\Delta x\|),$$

который называют *градиентом Фреше* функционала $\varphi(x)$ в точке x и обозначают как $\nabla\varphi(x)$, либо $\operatorname{grad}\varphi(x)$.

✓ Функционал $\varphi : E \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемым по Гато* в точке x, если существует такой линейный ограниченный функционал $f \in E^*$, называемый *градиентом Гато*, что для любого $h \in E$

$$\varphi(x+th) - \varphi(x) = t\langle f, h\rangle + o(t).$$

Градиент Гато и градиент Фреше обозначаются одинаково: $\nabla\varphi(x)$ — различие возлагается на контекст. А если существуют оба градиента, то они совпадают, — и в этом случае говорят просто о градиенте.

✓ **Лемма 11.3.1.** *Необходимым условием достижения функционалом* $\varphi(x)$ *в точке* x_0 *локального максимума или минимума является обращение в нуль градиента* $\nabla\varphi(x_0)$.

✓ **Лемма 11.3.2.** *Квадратичная форма* $\langle Ax, x\rangle$ *с компактным самосопряженным оператором* A *достигает максимума* (*и минимума*) *на единичной сфере в точке* x_0, *в которой* $Ax_0 = \lambda x_0$. *Если* $A \neq 0$, *то* $\lambda \neq 0$.

✓ **Теорема Брауэра 11.6.1.** *Если непрерывный оператор* T *отображает в себя замкнутый шар* $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$, *то уравнение* $x = Tx$ *разрешимо в* $\overline{B}$.

✓ **Принцип Шаудера 11.6.2.** *Если вполне непрерывный оператор T, действующий в банаховом пространстве, отображает в себя шар $\overline{B}$, то в $\overline{B}$ существует неподвижная точка оператора, т. е. уравнение $x = Tx$ разрешимо в $\overline{B}$.*

✓ **Теорема 11.7.1.** *Если непрерывный оператор T в $\mathbb{R}^n$ либо вполне непрерывный в банаховом пространстве E — отображает в себя множество Ω, гомеоморфное ограниченному замкнутому выпуклому множеству (не обязательно телесному), то уравнение $x = Tx$ разрешимо в Ω.*

13.9. Положительные операторы

✓ Пусть E — банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если для любого ненулевого $x \in K$

$$\lambda x \in K \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda x \notin K \quad \text{при} \quad \lambda < 0.$$

✓ Конус определяет в E *полуупорядоченность*: $x \geqslant y$ (равносильно $y \leqslant x$), если $x - y \in K$. Такие неравенства, как и обычные, можно умножать на неотрицательные числа; складывать одноименные; переходить к пределам;

$$x \leqslant y,\ y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z; \qquad x \leqslant y,\ y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

✓ Элементы конуса K считаются *положительными*. Множество

$$[u, v] = \{x \in E : u \leqslant x \leqslant v\}$$

называют *конусным отрезком*.

✓ Конус K называется *нормальным*, если из $0 \leqslant x \leqslant y$ следует $\|x\| \leqslant N(K)\|y\|$, и константа $N(K)$ не зависит от x и y. Наименьшее из чисел $N(K)$, для которых выполнено неравенство, называется *константой нормальности конуса*.

✓ Конус, содержащий внутренние точки, считается *телесным*. Конус называется *воспроизводящим*, если каждый элемент $x \in E$ представи́м в виде

$$x = u - v \qquad (u, v \in K).$$

✓ Конус K называется *правильным*, если любая неубывающая ограниченная по конусу последовательность сходится по норме, и — *вполне правильным*, если сходятся по норме неубывающие ограниченные *по норме* последовательности.

✓ Оператор $F : E \to E$ (не обязательно линейный) называется *положительным*, если $F(K) \subset K$; *монотонным*, если

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad F(x) \leqslant F(y).$$

Для линейных операторов положительность эквивалентна монотонности.

✓ **Теорема 12.3.1.** *Пусть для линейного положительного оператора A и ненулевого элемента $x_0 \in K$ выполняется неравенство*

$$Ax_0 \geqslant \gamma x_0.$$

Тогда $\rho(A) \geqslant \gamma$.

✓ **Теорема 12.3.2.** *Пусть линейный положительный оператор A удовлетворяет неравенству $Ax_0 \leqslant \gamma x_0$, $x_0 \in K$, $x_0 \neq 0$, и выполняется одно из условий:*

1. *K — нормальный воспроизводящий конус, оператор A x_0-ограничен сверху.*
2. *Оператор A вполне непрерывен, x_0 — квазивнутренний элемент K.*
3. *K — нормальный телесный конус, x_0 — внутренний элемент K.*

Тогда $\rho(A) \leqslant \gamma$.

✓ **Теорема 12.3.3.** *Пусть линейный оператор A положителен на нормальном воспроизводящем конусе и линейный оператор B удовлетворяет условию*

$$-Ax \leqslant Bx \leqslant Ax, \quad x \in K.$$

Тогда $\rho(B) \leqslant \rho(A)$.

✓ **Теорема 12.4.3.** *Если конус K нормальный и воспроизводящий, то у любого положительного оператора A число $\rho(A)$ является точкой его спектра.*

✓ **Теорема 12.4.4.** *Пусть линейный u-ограниченный оператор A вполне непрерывен и u-положителен. Тогда A имеет единственный положительный собственный вектор x_0, которому отвечает ведущее собственное значение $\lambda_0 > 0$.*

13.10. Пространства

• *Пространство m ограниченных* $(\sup\limits_i |x_i| < \infty)$ *числовых последовательностей* $x = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ имеет метрику

$$\rho(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|.$$

Пространство $c \subset m$ *сходящихся* числовых последовательностей с той же метрикой — является подпространством m.

• *Пространство l_2*: элементами служат последовательности, удовлетворяющие условию $\sum\limits^{\infty} x_i^2 < \infty$, а метрикой — функция

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

• *Пространство* $C[0, 1]$ непрерывных функций на $[0, 1]$ с нормой

$$\|x\| = \max_t |x(t)|,$$

которая в C определяет равномерную сходимость. Наряду с $C[0, 1]$ рассматриваются *пространства* $C[\overline{\Omega}]$ непрерывных функций, заданных на замыкании ограниченной области Ω. Из контекста обычно ясно, о какой области идет речь, поэтому чаще всего говорят и пишут — просто C.

• *Пространства* L_p $(p \geqslant 1)$ измеримых с p-й степенью функций с нормой

$$\|x\| = \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \qquad p \geqslant 1,$$

где подразумевается *интегрирование по Лебегу*.

Вместо $[0, 1]$ могут рассматриваться другие области, в том числе — бесконечные.

В некоторых случаях возникает потребность в рассмотрении *пространств* $L_{p\nu}$ с нормой

$$\|x\| = \left(\int\limits_0^1 \nu(t)|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},$$

характеризуемой плотностью усреднения $\nu(t)$.

• *Пространство* $L_\infty[0, 1]$ ограниченных измеримых функций с нормой

$$\|x\| = \operatorname{ess\,sup} |x(t)|.$$

• *Пространство* C^k непрерывно дифференцируемых (до k-го порядка включительно) функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\| = \max_{j\leqslant k} \max_t |x^{(j)}(t)|.$$

• *Пространства Соболева* W_p^l получаются в результате пополнения в норме

$$\|u\| = \left\{\int\limits_{\overline{\Omega}} |u(x)|^p\,dx + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}\ \int\limits_{\overline{\Omega}} |u^{(\alpha)}|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

множества l раз непрерывно дифференцируемых на достаточно «хорошей» области $\overline{\Omega}$ функций $u(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае $p = 2$ пространство W_2^l гильбертово, и его принято обозначать H^l.

• *Пространство* $C(-\infty, \infty)$ непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций $x(t)$. За определяющую систему полунорм принимают

$$p_n(x) = \max\left\{|x(t)| : t \in [-n, n]\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Сходимость при этом означает равномерную сходимость на любом ограниченном множестве.

• *Пространство* $C^\infty[0,1]$ бесконечно дифференцируемых на $[0,1]$ функций. Определяющая система полунорм:

$$p_n(x) = \max\left\{|x^{(n)}(t)| : t \in [0,1]\right\}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Сходимость равносильна равномерной сходимости производных всех порядков (в том числе нулевого — самой функции).

• *Пространство* $C^\infty(-\infty, \infty)$ бесконечно дифференцируемых на всей оси функций. Система полунорм:

$$p_{kn}(x) = \max\left\{|x^{(k)}(t)| : t \in [-n, n]\right\}, \qquad n = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Сходимость равносильна равномерной сходимости производных всех порядков на любом ограниченном множестве.

Сокращения и обозначения

◀ и ▶ — начало и конец рассуждения, темы, доказательства.

(**?**) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки», — но не является вопросом «правильно или неправильно?»

(**!**) — предлагает обратить внимание

п. в. — почти всюду

$x_n \xrightarrow{w} x$ — x_n слабо сходится к x

$\int$ — обозначает интегрирование по области определения функции, стоящей под интегралом, чаще всего: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ — объединение, пересечение и разность множеств X и Y

$X \Delta Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ — симметрическая разность множеств X и Y

$X \subset Y$ — X подмножество Y, в том числе имеется в виду возможность $X \subseteq Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

$\overline{X}$ — замыкание X

$Z = X + Y$ — множество элементов $z = x + y$, где $x \in X$, $y \in Y$

$\chi_A(x)$ — функция-индикатор множества A (равна 1 для $x \in A$ и 0 в противном случае)

2^X — множество всех подмножеств множества X

$\varnothing$ — пустое множество

$B(r, x)$ — шар радиуса r с центром в точке x

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

$\dim E$ — размерность пространства E

$\operatorname{ess\,sup} f(x)$ ($\operatorname{ess\,inf} f(x)$) — существенная верхняя (нижняя) грань $f(x)$

$z = x + iy$ — комплексное число, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — его тригонометрическая запись, $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая; $\overline{z} = z^* = x - iy$ — комплексно сопряженное число.

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение векторов x и y; в общем случае комплексных векторов

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1^* + \ldots + x_n y_n^*$$

$\mathbf{D}_A$ — область определения оператора A

$\mathbf{R}_A$ — область значений оператора A

$\ker A$ — нуль-пространство (ядро) оператора A

$\mathcal{E}(E_1, E_2)$ — пространство линейных операторов, действующих из E_1 в E_2

$\rho(A)$ — спектральный радиус оператора A

K_+ — конус неотрицательных функций

$\mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант

$\dfrac{df(t)}{dt} = f'(t)$ — производная $f(t)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ — частная производная функции u по переменной x. Эквивалентное обозначение u'_x

$$f^{(\alpha)}(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

$\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$

Литература

1. *Ахиезер Н. И.*, *Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
2. *Босс В.* Интуиция и математика. М., 2003.
3. *Босс В.* Лекции по математике: В 4 т. Т. 1. Анализ; Т. 2. Дифференциальные уравнения; Т. 3. Линейная алгебра; Т. 4. Вероятность, информация, статистика. М.: УРСС, 2004–2005.
4. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
5. *Гелбаум Б.*, *Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
6. *Гельфанд И. М.*, *Шилов Г. Е.* Обобщенные функции, вып. 1–3. М.: Физматгиз, 1958.
7. *Данфорд Н.*, *Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 2-е изд. М.: УРСС, 2004; *Они же.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
8. *Канторович Л. В.*, *Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. *Кириллов А. А.*, *Гвишиани А.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
11. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1977.
12. *Красносельский М. А.*, *Вайникко Г. М.*, *Забрейко П. П.*, *Рутицкий Я. Б.*, *Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
13. *Красносельский М. А.*, *Лифшиц Е. А.*, *Соболев А. В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
14. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
15. *Люстерник Л. А.*, *Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
16. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.
17. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
18. *Соболев В. И.* Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968.

19. *Тихонов В. А.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1980.

20. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

21. *Халмош П.* Теория меры. М.: ИЛ, 1953.

22. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

23. *Хилле Е.*, *Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

24. *Шилов Г. Е.* Математический анализ: специальный курс. М.: Физматгиз, 1960.

Предметный указатель

Проект издания 20 томов «Лекций по математике» В. Босса обретает краски.

Автор наращивает обороты и поднимает планку все выше.

Читательская аудитория ширится.

В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Поэтому учить надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший – покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, – но по-другому.

В. Босс

Из отзывов читателей:

Чтобы усвоить предмет, надо освободить его от деталей, обнажить центральные конструкции, понять, как до теорем можно было додуматься. Это тяжелая работа, на которую не всегда хватает сил и времени. В «Лекциях» такая работа проделывается автором.

Популярность книг В. Босса среди преподавателей легко объяснима. Дается то, чего недостает. Общая картина, мотивация, взаимосвязи. И самое главное — легкость вхождения в любую тему.

Содержание продумано и хорошо увязано. Громоздкие доказательства ужаты до нескольких строчек. Виртуозное владение языком. Что касается замысла изложить всю математику в 20 томах, с трудом верится, что это по силам одному человеку.

Лекции В. Босса — замечательные математические книги. Как учебные пособия, они не всегда отвечают канонам преподавания, но студентам это почему-то нравится.

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
URSS
E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46

3453 ID 30041
9 785484 001903 >